

I. megoldás. Az $\overline{AB}$ szám legalább 32, mert a kisebb természetes számok négyzete legfeljebb háromjegyű. Nem sok próbálgatással rájövünk, hogy A nem lehet kisebb 9-nél. Ugyanis $\overline{AB^2}$ is az A jeggyel kezdődik, márpedig azoknak a kétjegyű számoknak a négyzete, amelyek tízes jegye 3, 4, 5, 6, 7, rendre kisebb, mint $40^2 = 1600$, $50^2 = 2500$, $60^2 = 3600$, $70^2 = 4900$, ill. $80^2 = 6400$, a 8-cal kezdődők négyzete pedig legfeljebb $89^2 = 7921$ lehet. Így ezeknek a számoknak a négyzete kisebb számjeggyel kezdődik, mint az alap.

Ennek folytán a $\overline{CD^3}$ szám is csak 9000 és 10 000 közé eshet. E két korlát között egyetlen köbszám a $21^3 = 9261$, mert 20^3 még csak 8000, viszont 22^3 már 10 648. Eszerint más megoldás nem lehet, mint $A = 9$, $C = 2$, $B = 6$, $D = 1$. Innen $\overline{AB} = 96$, ennek négyzete 9216, ami megfelel az első feltételnek.

Uray Szabolcs (Szentendre, Móricz Zs. g. I. o. t.)

Megjegyzés. Kevesebb próbálgatás után jutunk el A egyetlen lehetséges értékéhez az alábbi úton. $\overline{AB^2} = (10A + B)^2 = 100A^2 + 20AB + B^2$ -ben $A, B \leq 9$ miatt $20AB + B^2 \leq 1701$, vagyis az A^2 számú százashoz legfeljebb 17 százast lép hozzá. $\overline{AB^2}$ -nek $\overline{ACDB}$ alakjában viszont a százások száma $\overline{AC} = 10A + C$. Ezek szerint $10A + C \leq A^2 + 17$, és így még inkább $10A \leq A^2 + 17$, vagyis $A^2 - 10A + 17 \geq 0$. A bal oldal az $A = 5 \pm \sqrt{8}$ értékek között negatív, ennél fogva vagy $A \leq 2$ (ezt azonban már kizártuk), vagy $A \geq 8$. Mivel ismét $89^2 < 8000$, csak $A = 9$ vezethet megoldásra.

Szentai Judit (Budapest, Kanizsai D. lg. I. o. t.)

II. megoldás. $\overline{CD^3} - \overline{AB^2} = \overline{BD} - \overline{DB} = (B - D)9$, osztható 9-cel. Megmutatjuk, hogy $\overline{AB}$, s így vele együtt $\overline{CD}$ is osztható 3-mal. Ha e egész szám, $e^3 - e = (e - 1)e(e + 1)$ osztható 3-mal, mert három egymás utáni egész szám szorzata, és ezek egyike osztható 3-mal. Ezt $e = \overline{CD}$ -re alkalmazva:

$$\overline{CD^3} - \overline{CD} = \overline{ACBD} - \overline{CD} = 1000A + 10B + 90C = 90(10A + C) + 10 \cdot \overline{AB}.$$

A bal oldal és a jobb oldal első tagja osztható 3-mal, tehát a jobb oldal második tagja is, ami csak úgy lehetséges, hogy $\overline{AB}$ osztható 3-mal. Ekkor azonban $\overline{CD^3} - \overline{AB^2}$ csak úgy lehet 9-cel osztható, ha $\overline{CD}$ is osztható 3-mal. Másrészt

$$10^3 = 1000 \leq \overline{CD^3} < 10\,000 < 22^3 (= 10\,648),$$

tehát $10 \leq \overline{CD} \leq 21$. Ebben a számközben a 3-mal osztható számok jönnek tekintetbe, vagyis a 12, 15, 18, 21 számok.

Azt is tudjuk, hogy $\overline{CD^3}$ utolsó jegye D , megegyezik az alap utolsó jegyével. Ez csak az 1, 4, 5, 6, 9-re végződő számokra teljesül, tehát csak 15 vagy 21 lehet $\overline{CD}$. Ezek közül 15^3 utolsó két jegye 75, s így $\overline{CD} = 15$ mellett $\overline{AB^2}$ -nek 57-re kellene végződnie, ami lehetetlen, mert négyzetszám nem végződhet 7-re.

Egyetlen lehetőségként $\overline{CD} = 21$ maradt. Erre

$$\overline{CD^3} = 21^3 = 9261 (= \overline{ACBD}) \text{ és } (\overline{ACDB} =) 9216 = 96^2 = \overline{AB^2}$$

kielégíti a feltételeket.