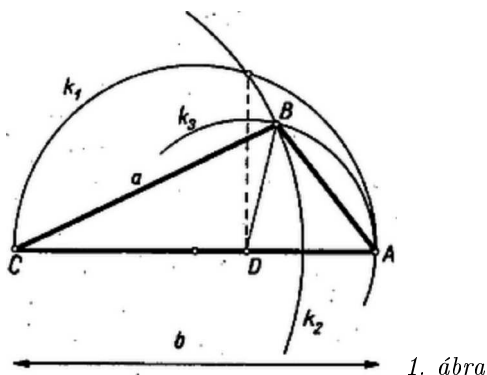


Előzetes megjegyzés. A szögek egyszerű aránya alapján az ábrát többféleképpen is kiegészíthetjük úgy, hogy talmazzon egyenlő szárú háromszöget. Az I. megoldás az elemzéshez a legkevesebb és a legtermészetesebb kiegészítést veszi, tovább viszont a többiekénél erősebb eszközöket használ.

I. megoldás. Képzeljük a feladatot megoldottnak és legyen a keresett ABC háromszögben $BC = a = 4$ cm, $AC = b = 5$ cm és $\beta = \angle ABC = 2\angle BAC = 2\alpha$. Messe az ABC szög felezője AC -t D -ben. Az ABD háromszög A -nál és B -nél levő szögei egyenlők, ezért $BD = AD$, másrészt $\angle BDC = 2\angle BAD = \angle ABC$, tehát a BDC háromszög hasonló ABC -höz, mert szögeik egyenlők. Így

$$(1) \quad CD : CB = CB : CA,$$

vagyis CB mértani középárányos CA és az ismeretlen CD között, tehát CD megszerkeszthető. Ebből megkapjuk $DB = DA$ -t, ennél fogva a CDB háromszög is megszerkeszthető.

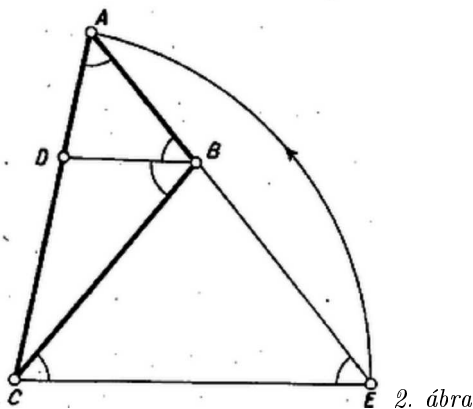


Egy lehetőség a végrehajtásra: az adott AC szakasz mint átmérő fölé k_1 (Thalész-) kört és C körül az adott CB sugárral k_2 kört írunk, metszéspontjuknak AC -n levő vetülete D ; a D körül DA sugárral írt k_3 kör k_2 -ből kimetszi B -t, a keresett háromszög harmadik csúcsát.

A nyert ABC háromszögben AC , CB hossza az előírás szerinti, másrészt $DA = DB$ miatt $\angle BDC = 2\angle BAC$; (1) alapján a közös szögű ABC és BDC háromszögek hasonlóak, így $\angle ABC = \angle BDC = 2\angle BAC$, tehát ABC háromszög megfelel a követelményeknek. Két B pontot kapunk, de ezek AC -re tükrösek, csak egy megoldás van.

Régi Erzsébet (Székesfehérvár, Teleki B. lg. II. o. t.)

Megjegyzés. Többen diszkussziót fűztek megoldásukhoz. Ennek itt nincs helye, mert AC és BC értéke rögzített, nincs változási lehetőség. Ilyenkor vagy van megoldás – mint itt is –, vagy nincs.



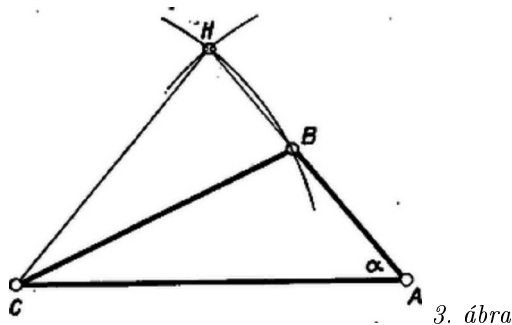
II. megoldás. Messe a C -n át BD -vel párhuzamosan húzott egyenes AB meghosszabbítását E -ben (2. ábra). Ekkor

$$\angle AEC = \angle ABD = \angle BAD = \angle DBC = \angle ECB,$$

részben a szerkesztés, részben a feladatnak a szögekre vonatkozó feltétele következtében. Így egyrészt az ACE , másrészt a CBE háromszög egyenlő szárú: $EC = AC$, $EB = BC$. A CBE háromszög mindegyik oldala ismert, tehát a háromszög $2BC > CE$ folytán megszerkeszthető. Ezután A -t mint a C körül CE sugárral rajzolt kör és az EB egyenes második metszéspontját kapjuk. $CB < CE$ folytán ez E -től különböző pont, és B az A és E közt fekszik.

Az ABC háromszögben AC és BC a kívánt hosszúságú, másrészt $\angle BCE = \angle CEB = \angle CAE$ és $\angle ABC = \angle BCE + \angle BEC = 2\angle CAE = 2\angle CAB$. Így a nyert háromszög megfelel a feladat követelményeinek.

Berendi Emma (Budapest, Ságvári E. gyak. lg. II. o. t.)



3. ábra

III. megoldás. Messe az AB egyenest a C körül BC sugárral rajzolt kör másodszor a H pontban (3. ábra). B és H különbözők, kivéve ha $ABC\angle = 90^\circ$, $BAC\angle = 45^\circ$, amikor $BC = AC/\sqrt{2}$, de ez esetünkben nem áll fenn. A H pont vagy A és B közt van ($BC < AC$ folytán), vagy AB -nek a B -n túli meghosszabbításán. Vizsgáljuk az AHC háromszöget. Az első esetben¹ $AHC\angle = 180^\circ - BHC\angle = 180^\circ - HBC\angle = 80^\circ - 2\alpha$; a második esetben $AHC\angle = HBC\angle = 180^\circ - ABC\angle = 180^\circ - 2\alpha$, így mindkét esetben $ACH\angle = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = \alpha$, tehát az AHC háromszög egyenlő szárú, $AH = HC = BC$. Ennélfogva a keresett háromszög B csúcsát az $AC = b$ alap fölé a szárral szerkesztett ACH egyenlő szárú háromszög AH szárából a C körül a sugárral írt körív metszi ki. – A végrehajtás szempontjából ez a szerkesztés a legegyszerűbb, hiszen az említett körívet már az ACH háromszög szerkesztése közben megrajzoltuk.

Csada Imre (Budapest, Petőfi S. g. II. o. t.)

¹ A méretekből az adódik, hogy itt a 2. esettel állunk szemben, ezt mutatja a 3. ábra. Ezen az 1. esetre elgondolt viszonyokat B és H felcserélésével szemléltethetjük.