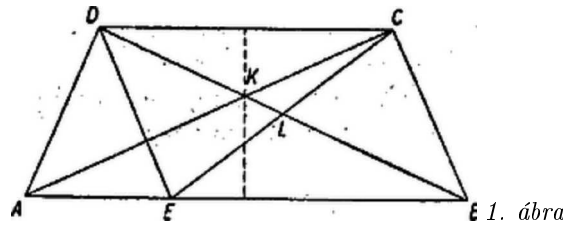


I. megoldás. Legyen az $ABCD$ trapézban $AB = 3m$, $CD = 2m$. Így a párhuzamos C és D egyikéből indul ki, legyen $DE \parallel CB$. A trapéz és a $BCDE$ paralelogramma közös BD átlójának AC , EC -vel való metszéspontját K , ill. L -lel jelölve a kérdéses CKL háromszög t területét a CDL és CDK háromszögek t_1 , t_2 területéből kivonással kaphatjuk. Az előbbi a paralelogramma $1/4$ része, így $t_1 = 2m \cdot m/4 = m^2/2$.

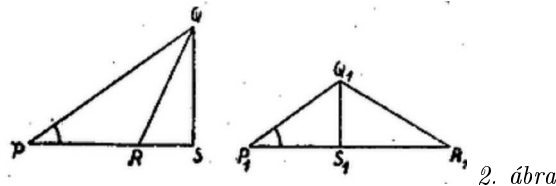


A CDK háromszög hasonló ABK -hoz, így K -ból húzott magasságaik aránya megegyezik az alapok $2 : 3$ arányával, összegük viszont m , tehát CDK magassága $2m/5$, területe $t_2 = 2m^2/5$. Ezek szerint $t = m^2/10$. – A trapéz területe viszont $T = 5m^2/2$, tehát valóban $T/t = 25$.

Gondol Ibolya (Tapolca, Bacsányi J. g. I. o. t.)

Megjegyzés. Egy más felbontás (az idomok jele egyszersmind a területet is jelöli):

$$CKL = ABC - ABK - BCL = \frac{1}{2}(AEC - AEK).$$



II. megoldás. A $CKL\Delta$ területének kiszámításához a fenti hasonlóságból felhasználjuk, hogy $CK : AK = 2 : 3$, és így $CK = 2CA/5$. Másrészt $CL = CE/2$. A CKL és CAE háromszögek C -nél levő szöge közös, ezért területeik aránya – mint alább megmutatjuk – megegyezik a C -ből kiinduló oldalaiából képezett szorzatok arányával:

$$CKL : CAE = (CK \cdot CL) : (CA \cdot CE) = \left(\frac{2}{5}CA \cdot \frac{1}{2}CE\right) : (CA \cdot CE) = 1 : 5.$$

Ámde a CAE háromszög területe $m^2/2$, mert $AE = AB - DC = m$, tehát ismét $CKL = m^2/10$.

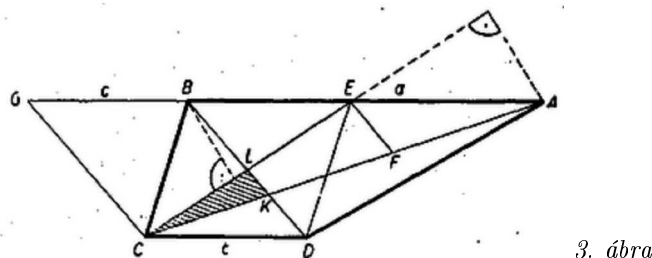
A felhasznált segédvétel bebizonyítása végett húzzuk meg a PQR és $P_1Q_1R_1$ háromszögekben – amelyekben $\angle QPR = \angle Q_1P_1R_1$, a QS , Q_1S_1 magasságot. Ekkor a PQS és $P_1Q_1S_1$ derékszögű háromszögek hasonlóságát felhasználva

$$\begin{aligned} PQR : P_1Q_1R_1 &= \frac{PR \cdot QS}{2} : \frac{P_1R_1 \cdot Q_1S_1}{2} = \\ &= PR \frac{QS}{Q_1S_1} : P_1R_1 = PR \frac{QP}{Q_1P_1} : P_1R_1 = \frac{PR \cdot PQ}{P_1R_1 \cdot P_1Q_1}. \end{aligned}$$

A segédvétel nyilván akkor is érvényes, ha $\angle QPR + \angle Q_1P_1R_1 = 180^\circ$.

Bock György (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

III. megoldás. Tetszés szerinti $ABCD$ trapézban legyen $\angle CDA > \angle BCD$. Bontsuk a trapézt a BC szárral párhuzamos ED szakasszal paralelogrammára és háromszögre. Messe a BD átlót AC , ill. CE a K , ill. L pontban. Meg fogjuk határozni a trapéz T területének és a CKL háromszög t területének az arányát. Legyenek a trapéz párhuzamos oldalai $AB = a$, $CD = c$.



A trapézt az ACD , AEC és BCE háromszögekre bontottuk. Ezek közül az első és az utolsó egyenlő területű, mert $BE = CD = c$ (egy paralelogramma szemben fekvő oldalai), és az ehhez tartozó magasságok is egyenlők (a trapéz magassága). Jelöljük ezt a területet t' -vel, az AEC háromszög területét t'' -vel. Ezek aránya, mint pl. a CE oldal mentén csatlakozó két háromszög területének aránya, megegyezik a közös oldalhoz tartozó magasságok arányával, az pedig a BE/AE aránnyal:

$$\frac{t'}{t''} = \frac{BE}{AE} = \frac{c}{a-c}; \quad T = 2t' + t'' = \left(\frac{2c}{a-c} + 1 \right) t'' = \frac{a+c}{a-c} t''.$$

A keresett arány meghatározásához a t''/t arányra van még szükségünk. Húzzunk E -ből BD -vel párhuzamos EF szakaszt a CA egyenesig. Ekkor, mivel $CE = 2CL$ (a $BCDE$ paralelogramma átlói felezik egymást), így a CKL háromszöghöz hasonló CEF háromszög területe $4t$. A $t''/4t$ arányt úgy határozhatjuk meg, mint az AEC és CEF háromszögek területének az arányát. Ez megegyezik a közös magassággal rendelkező AC és FC oldalak arányával. Húzzunk C -ből párhuzamost BD -vel, messe ez AB meghosszabbítását G -ben. Ekkor $BG = c$, s így

$$\frac{t''}{4t} = \frac{AC}{FC} = \frac{AG}{EG} = \frac{a+c}{2c}, \quad t'' = 2 \frac{a+c}{c} t.$$

$$T = \frac{a+c}{a-c} t'' = 2 \frac{(a+c)^2}{c(a-c)} t.$$

A T/t arányt a és c , sőt már arányuk: a/c is meghatározza:

$$T = 2 \frac{(a+1)^2}{a-1} t.$$

A feladatban $a = 3/2$, s így

$$T = 2 \frac{(5/2)^2}{1/2} t = 25t.$$

A feladatban fölösleges adat tehát a párhuzamos oldalak viszonya a magassághoz, csak az arányukra volt szükségünk. Azt sem használtuk ki (egyik bizonyításban sem), hogy a trapéz szimmetrikus.