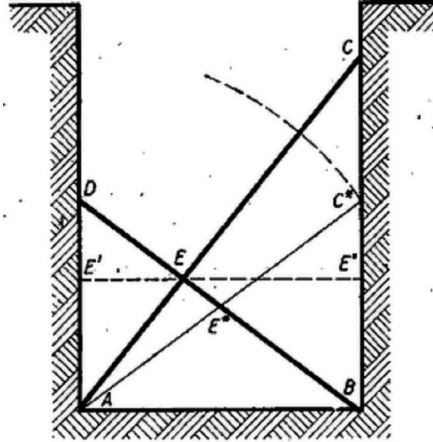


Legyen az árok keresztmetszetének alapéle AB , a létrák támaszkodási pontja az oldalfalakon C és D úgy, hogy $AC = 3$ m és $BD = 2$ m, a létrák keresztezési pontja E , végül ennek vetülete az AD falon E' . Bálint állítása szerint $E'E = 1$ m.



Gondoljunk a BC falhoz hozzátámasztva egy $AC^* = 2$ m-es létrát is. Ennek E^* keresztezési pontja BD -vel mindkét létrának felező pontja, $E^*D = 1$ m. C^* a CD szakaszon van, mert C az A körül 2 m sugárral írt körön kívül van, B pedig belül (ugyanis $AB < BD = 2$ m). Így AC az AC^* egyenes D -t tartalmazó partján van, tehát az E keresztezési pont a BD egyenes E^*D szakaszára esik. Így

$$E'E < ED < E^*D = 1 \text{ m.}$$

Bálint tehát lehetetlent állított:

Megjegyzések. 1. Ha már tudjuk, hogy C^* a BC szakaszon van (tehát $AD = BC^* < BC$), akkor így is belátható Bálint állításának lehetetlensége: Az ADE és CBE háromszögek hasonlóak, mert AD és CB párhuzamossága miatt megfelelő szögek egyenlők. Mivel $AD < BC$, így a rájuk merőleges magasságokra is $EE' < EE''$ (ahol E'' az E vetülete BC -n), tehát

$$AB = E'E + EE'' > 2EE',$$

vagyis

$$EE' < \frac{1}{2}AB < \frac{1}{2}BD = 1 \text{ m.}$$

2. A feladat szövegének helyesbítése előtt számos megoldó megállapította, hogy Bálint (eredeti) állítása ($EE'' = 1$ m) nem helytelen, hanem az árok d szélességére vonatkozóan nyújt felvilágosítást. Ugyanis ekkor (minden távolságot méterben mérve) $EE' = d - 1$, Pythagorász tétele szerint $AD = \sqrt{4 - d^2}$, $BC = \sqrt{9 - d^2}$, és az említett hasonlóság folytán

$$\frac{EE'}{EE''} = \frac{AD}{BC}, \quad EE' \cdot BC = EE'' \cdot AD.$$

Ebből, a távolságok d -vel kifejezett értékeit behelyettesítve, négyzetre emelés és rendezés után a

$$d^4 - 2d^3 - 9d^2 + 18d - 5 = 0$$

egyenletre jutunk. Másrészt tudjuk, hogy $BD = 2 > d > EE'' = 1$.

Mármost az egyenlet bal oldalának értéke $d = 1$ mellett $+3$, pozitív, $d = 2$ mellett -5 , negatív, ennél fogva valamely 1 és 2 közti d -érték mellett a bal oldal értéke 0. $d = 3/2$ mellett a bal oldal értéke $1/16$, tehát ez a d -érték kevéssel nagyobb 1,5-nél; $d \approx 1,507$ mellett a bal oldal már negatív és abszolút értékben kisebb 0,001-nél. Valóban, ekkor 4 tizedes jegyre $AD \approx 1,3149$, $BC \approx 2,5940$, és így $E'E = AD \cdot EE'' : BC = AD : BC \approx 0,5069$ m. – Ez az adott esetben a szükségesnél sokkal nagyobb pontosság, hiszen a létrákat egyenesszakaszokkal helyettesítettük, holott „vastagságuk” 10 cm fölött jár. – Ezek szerint 1,5 méter széles árokban Bálint eredeti állítása helyes.