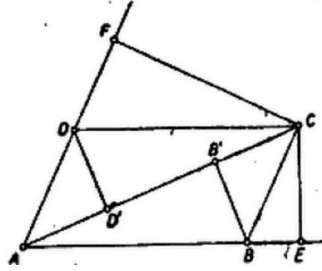


I. megoldás. $AC > BD$ miatt a paralelogrammának A -nál levő szöge és B , D -nél levő külső szöge hegyes szög, ezért E az AB oldal B -n túli, F az AD oldal D -n túli meghosszabbítására esik.



1. ábra

Az ACE és BCE derékszögű háromszögekből

$$(2) \quad \begin{aligned} AC^2 &= AE^2 + EC^2 = AE^2 + BC^2 - BE^2 = AE^2 + BC^2 - (AE - AB)^2, \\ AC^2 &= BC^2 + 2AB \cdot AE - AB^2. \end{aligned}$$

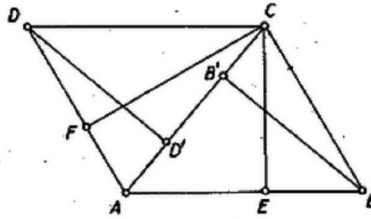
Hasonlóan az ACF és DCF derékszögű háromszögekből, $DF = AF - AD$ behelyettesítésével

$$(3) \quad AC^2 = DC^2 + 2AD \cdot AF - AD^2.$$

Most már (2) és (3)-ból összeadással, $BC = AD$ és $DC = AB$ figyelembevételével, végül 2-vel osztva (1)-et kapjuk.

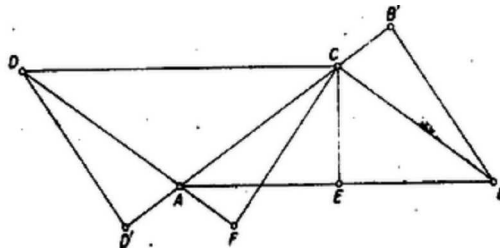
$AC = BD$ esetén a paralelogramma derékszögű, $E \equiv B$ és $F \equiv D$, így (1) a Pythagorász tételre egyszerűsödik.

$AC < BD$ esetén az ABC szög hegyesszög. Feltehetjük, hogy AB -vel a paralelogramma nem kisebb oldalát jelöltük: $AB \geq BC$. Másrészt $BE < BC$, így $BE < AB$, tehát E az AB szakaszon van. Ezért (2) itt is érvényes, mert BE felhasznált kifejezése helyére a (-1) -szerese lép, evvel azonban a négyzete nem változik meg.



2. ábra

Ugyanez áll (3)-ra is abban az esetben, ha F az AD szakaszra, esetleg éppen A -ba esik (2. ábra), ilyenkor tehát (1) érvényes. Az $F \equiv A$ esetben az ABC háromszög C -nél derékszögű és (1) az ismert mértani középárányos tételre egyszerűsödik: $AC^2 = AB \cdot AE$.



3. ábra

Ha F az AD oldal A -n túli meghosszabbítására esik, akkor $DF = AF + AD$ (3. ábra). Ezt $DF = -(-AF - AD)$ alakban írva (3) helyére a fenti módon

$$(3') \quad AC^2 = DC^2 - 2AD \cdot AF - AD^2,$$

és folytatólag (1) helyére a következő lép:

$$(1') \quad AB \cdot AE - AD \cdot AF = AC \cdot AC$$

(1)-et és (1')-t összefoglalva, egyszersmind a paralelogramma oldalaira tett megszorítást is feloldva (1)-et minden esetre érvényesnek mondhatjuk ki azzal a hozzáadással, hogy az AB , AD irányokat pozitívnak véve az AE , AF szakaszokat pozitív vagy negatív előjellel vesszük aszerint, hogy A -tól különböző végpontjuk A -nak a B -vel, ill. D -vel megegyező vagy ellentétes oldalán van.

Komlós György (Debrecen, Mechwart A. gépip. t. II. o. t.)

II. megoldás. Legyen B és D -nek AC -re való vetülete B' , ill. D' . A közös hegyes szöggel bíró ACE és ABB' derékszögű háromszögek hasonlóak, ezért

$$AE : AB' = AC : AB, \quad \text{amiből} \quad (4) \quad AB' = \frac{AB \cdot AE}{AC}.$$

Ugyanígy az ACF és ADD' háromszögek hasonlóak, továbbá az ADD' és CBB' háromszögek egybevágók, tehát ACF és CBB' hasonlóak. Ebből

$$AF : CB' = AC : CB \quad \text{és} \quad (5) \quad CB' = \frac{CB \cdot AF}{AC} = \frac{AD \cdot AF}{AC}.$$

Az ABC szög tompaszög, ezért B' az AC szakaszon van. Így (4) és (5) összeadásával

$$AB' + B'C = AC = \frac{AB \cdot AE + AD \cdot AF}{AC},$$

ebből pedig AC -vel átszorozva (1)-et kapjuk.

Az $AC < BD$ (és $AB \geq BC$) esetre meg kell vizsgálnunk a paralelogramma középpontjára nyilvánvalóan tükrös B' , D' pontpár helyzetét. Aszerint amint F az AD szakaszra, vagy ennek meghosszabbítására esik, a CAD szög hegyes-, ill. tompaszög, ezért D' az AC szakaszon, ill. ennek A -n túli meghosszabbításán van. *Csak az utóbbi helyzettel kell foglalkoznunk.* Ekkor $AC = AB' - CB'$, és ismét (1)-re jutunk.

Nagy László (Budapest, I. István g. II. o. t.)

Megjegyzés. Az állítás a vektoralgebra módszerével is bizonyítható.

Máté Attila (Szeged, Radnóti M. g. I. o. t.)