

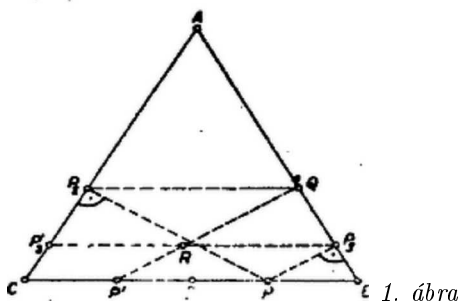
I. megoldás. Legyen a szabályos háromszög ABC , vegyük első, második, harmadik oldalnak rendre BC -t, CA -t, AB -t, és legyen a BC szakasz felezőpontja D . A szimmetria miatt elég az állítást a D kezdőpontú, B -n átmenő félegyenesen vett P kiindulópontokra igazolnunk. Legyen a két merőleges talppontja P_2, P_3 , a párhuzamos metszéspontja Q , ekkor azt kell bebizonyítani, hogy $P_3Q = DP$.

Ha P a D -ben vagy a B -ben van, az állítás nyilvánvalóan igaz, mert az első esetben P_2 és P_3 tükrösek az AD tengelyre és így $Q \equiv P_3$, a másodikban pedig $P_3 \equiv B$, P_2 és Q oldalfelező pontok, és így mindkét szakasz $BC/2$ -vel egyenlő.

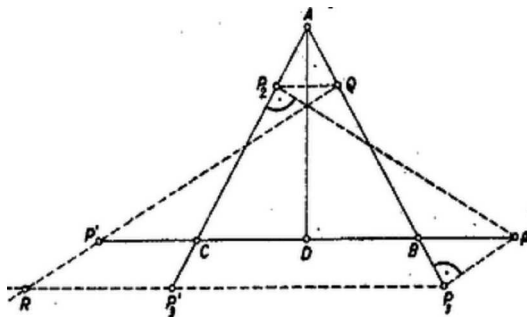
Ha P a DB szakasz pontja, akkor P_2 a CA szakaszon, Q és P_3 a BA szakaszon van. A PBP_3 és PCP_2 derékszögű háromszögek hasonlók ABD -höz, ezért $BP_3 = BP/2$, $CP_2 = CP/2$, továbbá a szimmetria miatt $BQ = CP_2$. Mivel $BP < CP$, és így $BP_3 < CP_2$, azért (1. ábra)

$$\begin{aligned} P_3Q &= BQ - BP_3 = CP_2 - BP_3 = \\ &= \frac{CP - BP}{2} = \frac{(CD + DP) - (BD - DP)}{2} = DP, \end{aligned}$$

ugyanis $CD = BD$.



1. ábra



2. ábra

Ha P átlép CB -nek B -n túli meghosszabbítására, akkor P_2 a CA , Q pedig a BA félegyenesen adódik, P_3 pedig AB -nek B -n túli meghosszabbításán. Az előbbiekhöz részben hasonlóan (2. ábra)

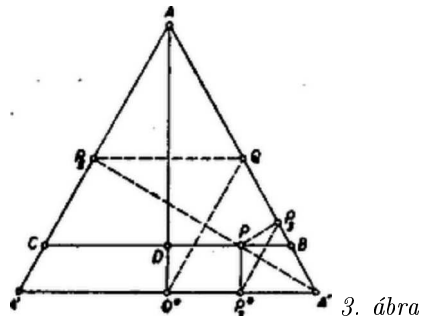
$$\begin{aligned} P_3Q &= P_3B + BQ = P_3B + CP_2 = \\ &= \frac{BP + CP}{2} = \frac{(DP - DB) + (CD + DP)}{2} = DP. \end{aligned}$$

Eszerint az állítást minden figyelembe veendő esetben helyesnek találtuk.

Horváth Péter (Budapest, Kossuth L. gépip. t. II. o. t.)

II. megoldás. P -nek csak a B és D -től különböző helyzeteivel foglalkozunk. Ábránkat AD -re tükrözve B és C , valamint P_2 és Q egymásba mennek át, legyen P és P_3 tükrösképe (DC -n ill. CP_2 -n) P' , P'_3 , továbbá $P'Q$ és $P_3P'_3$ metszéspontja R . Ekkor $P'Q \perp AB$, mint az AC -re merőleges PP_2 szakasz tükrösképe, ezért $P'Q$ párhuzamos PP_3 -mal. Így a PP_3RP' négyszög paralelogramma (mert $P_3R \parallel BC$ és $P_3R = PP' = 2DP$). Másrészt az RP_3Q háromszög hasonló ABD -hez, tehát $P_3Q = P_3R/2 = DP$.

Gáspár Sándor (Budapest, I. István g. II. o. t.)



III. megoldás. Legyen A -nak P_2 -re és Q -ra való tükörképe A' , ill. A'' . Így P_2 és Q az $AA'A''$ háromszög oldalfelező pontjai, és P_2A'' átmegy P -n, mert $PP_2 \perp AA'$. Legyen Q és P_3 tükörképe $A''P_2$ -re Q^* , P_3^* (3. ábra). Ekkor Q^* felezi $A'A''$ -t, tehát rajta van az ABC és $AA''A'$ szabályos háromszögek közös AD tengelyén, ezért $DQ^* \perp BC$. Továbbá $PP_3^* \perp A'A'' \parallel BC$, mert PP_3^* az AB -re merőleges PP_3 tükörképe. Ezek szerint a $PDQ^*P_3^*$ négyszög téglalap, tehát $P_3Q = P^*Q^* = PD$.

Szörényi Miklós (Pécs, Széchenyi I. g. I. o. t.)