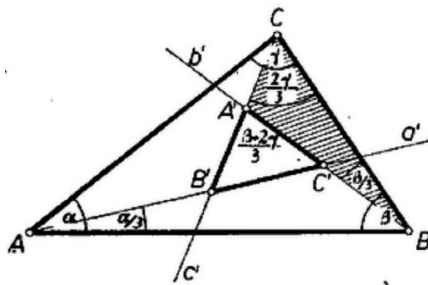


Jelöljük az adott  $H$  háromszög  $A, B, C$  csúcsánál levő  $\alpha, \beta, \gamma$  szög első harmadolóját rendre  $a', b', c'$ -vel, továbbá  $a'$  és  $b'$  metszéspontját  $C'$ -vel,  $b'$  és  $c'$ -ét  $A'$ -vel,  $c'$  és  $a'$  metszéspontját  $B'$ -vel. Ekkor az  $A'B'C' = H'$  háromszög  $A'$ -nél,  $B'$ -nél és  $C'$ -nél levő szöge, mint az  $A'BC, B'CA, C'AB$  háromszög külső szöge, így fejezhető ki:

$$(1) \quad \begin{aligned} B'A'C' \sphericalangle &= \alpha' = \frac{\beta + 2\gamma}{3}, & C'A'B' \sphericalangle &= \beta' = \frac{\gamma + 2\alpha}{3}, \\ A'C'B' \sphericalangle &= \gamma' = \frac{\alpha + 2\beta}{3}. \end{aligned}$$



Feltehetjük, hogy a betűzést úgy választottuk, hogy  $H$ -nak nincs sem  $\alpha$ -nál kisebb, sem  $\gamma$ -nál nagyobb szöge, vagyis hogy

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma.$$

Így  $H'$  szögei között  $\alpha'$ -nél nagyobb semmi esetre sincs, hiszen  $\alpha'$ -ből  $\beta'$  is,  $\gamma'$  is csökkentéssel vagy változatlanul hagyással állítható elő:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{3}(\beta + \gamma + \gamma) \geq \frac{1}{3}(\alpha + \alpha + \gamma) = \beta', \\ &\geq \frac{1}{3}(\beta + \beta + \alpha) = \gamma'. \end{aligned}$$

Eszerint, ha  $H$  és  $H'$  szögei páronként megegyeznek, akkor

$$\alpha' = \gamma, \quad \text{azaz} \quad \frac{\beta + 2\gamma}{3} = \gamma, \quad \text{amiből} \quad \beta = \gamma.$$

Így  $\beta'$  és  $\gamma'$  közül  $\beta'$  nem lehet a nagyobb, mert

$$\gamma' - \beta' = \frac{1}{3}(\alpha + 2\beta - \gamma - 2\alpha) = \frac{1}{3}(\beta - \alpha),$$

ez pedig nem lehet negatív. Tehát

$$\beta' = \alpha \quad \text{és} \quad \gamma' = \beta,$$

amiből (1) felhasználásával

$$\frac{\gamma + 2\alpha}{3} = \alpha, \quad \gamma = \alpha, \quad \text{ill.} \quad \frac{\alpha + 2\beta}{3} = \beta, \quad \alpha = \beta,$$

vagyis  $H$  szabályos háromszög. Így viszont (1) szerint  $\alpha' = \beta' = \gamma'$ , tehát  $H'$  is szabályos háromszög. Ezt kellett bizonyítanunk.

*Darabos Zsuzsanna* (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)  
dolgozata alapján.

*Megjegyzés.* Számos versenyző tévesen azt bizonyította, hogy ha  $H$  szabályos, akkor  $H'$  is szabályos.