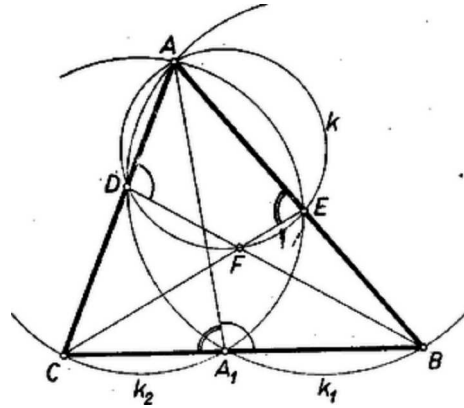


Első megfontolásunkat az 1. ábra helyzetéhez kapcsoljuk, amelyen D az AC szakaszon, E az AB szakaszon van. Ekkor F az ABC háromszög belsejében adódik. Megmutatjuk, hogy az ADF és AEF szögek összege 180° , ebből következik, hogy A, D, F, E egy kör pontjai.



1. ábra

D az ABA_1 háromszög k_1 körülírt körén van, és pedig AB -nek ugyanazon oldalán, mint A_1 , ezért

$$(1) \quad \angle ADF = \angle ADB = \angle AA_1B.$$

Másrészt E az ACA_1 háromszög k_2 körülírt körén van és AC -nek A_1 -gyel megegyező oldalán, ezért

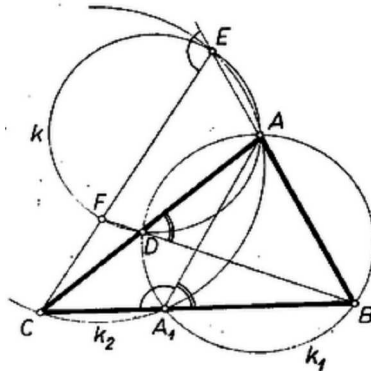
$$(2) \quad \angle AEF = \angle AEC = \angle AA_1C.$$

Ezek szerint

$$\angle ADF + \angle AEF = \angle AA_1B + \angle AA_1C = 180^\circ,$$

amit bizonyítani akartunk.

Azokra az esetekre, ha D és E egyike vagy mindkettőjük kívül adódik az AC , ill. AB oldalszakaszon, bizonyításunkon kisebb, a lényegbe nem vágó módosításokat kell tennünk.



2. ábra

Ha D az AC szakaszon adódik, E viszont az AB szakaszon kívül, akkor E csak AB -nek A -n túli meghosszabbításán lehet, mert B a k_2 körre nézve külső pont, hiszen a BC egyenesnek k_2 -vel közös pontjai: C és A_1 , a B -nek ugyanazon oldalán vannak. Így D az AC szakaszon, a BCE háromszög belsejében van, F pedig a CE szakaszon, tehát D szétválasztja a B, F pontokat. Ekkor (1) és (2) így módosulnak (2. ábra):

$$(1') \quad \angle ADF = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - \angle AA_1B,$$

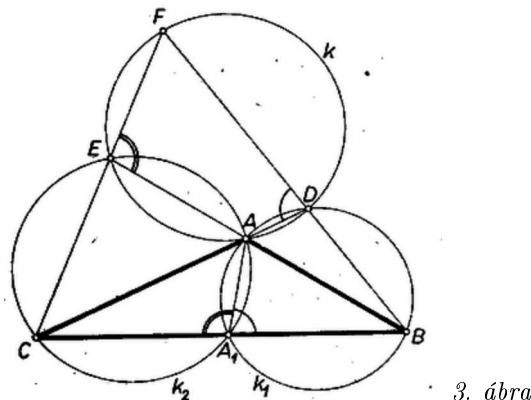
$$(2') \quad \angle AEF = \angle AEC = 180^\circ - \angle AA_1C,$$

ugyanis E és A_1 most az AC egyenes két különböző oldalán állnak. Összeadással ismét

$$\angle ADF + \angle AEF = 360^\circ - (\angle AA_1B + \angle AA_1C) = 180^\circ.$$

Ha E adódik belső pontnak és D külsőnek, akkor felcserélve a B és C betűket és következésképpen D, E -t is – a most vizsgált esetre jutunk.

Ha pedig D és E mindegyike kívül adódik az AC , ill. AB szakaszon, akkor az előbbi esethez hasonlóan az oldalszakaszok A -n túli meghosszabbításán vannak, vagyis az AB, AC egyenesnek A_1 -gyel ellentétes oldalán (3. ábra). Ekkor először F helyzetét kell tisztáznunk.



Megmutatjuk, hogy F az AB egyenesnek A_1 -gyel ellentétes oldalán van, mert a BD és CE egyeneseknek AB -vel bezárt szögei azon az oldalon adnak 180° -nál kisebb összeget. A BD és AB közti szög egyenlő az AA_1D szöggel, a CE és AB közti szög pedig E -nél levő külső szöge az EAA_1C húrnégyszögnek, és így egyenlő a CA_1A szöggel. Ezért összegük egyenlő a CA_1D szöggel, ez pedig kisebb 180° -nál, mert D és A a BC -nek ugyanazon oldalán vannak.

Most már a fentebbiekhez hasonlóan

$$(1'') \quad ADF\angle = 180^\circ - ADB\angle = AA_1B\angle,$$

$$(2'') \quad AEF\angle = 180^\circ - AEC\angle = AA_1C\angle,$$

tehát összegük 180° .

Ha D , vagy E egybeesik A -val (k_1 érinti AC -t, vagy k_2 érinti AB -t), akkor az állítás semmitmondóvá válik.

Szentai Judit (Budapest, Kanizsay Dorottya lg. I. o. t.)

Megjegyzés. Az 1. ábra helyzetében megmutatjuk, hogy az A_1 pontnál levő szögek felhasználását el lehet kerülni.

$$\begin{aligned} ADF\angle + AEF\angle &= ADA_1\angle - \\ &- BDA_1\angle + AEA_1\angle - CEA_1\angle = \\ &= (180^\circ - ABC\angle) - BAA_1\angle + \\ &+ (180^\circ - ACB\angle) - CAA_1\angle = 180^\circ + \\ &+ [180^\circ - ABC\angle - ACB\angle - \\ &- (BAA_1\angle + A_1AC\angle)] = 180^\circ. \end{aligned}$$

Marosi Judit (Budapest, Berzsenyi D. lg. II. o. t.)