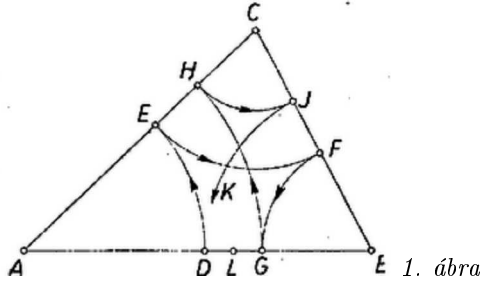


I. megoldás. A feladatot pusztán számítással megoldhatjuk. Legyen $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ és $AD = AE = x$, ekkor

$$\begin{aligned} CE &= b - x = CF, & BF &= a - CF = a - (b - x) = BG, \\ AG &= c - BG = c - [a - (b - x)] = AH, \\ CH &= b - AH = b - [c - [a - (b - x)]] = CJ, \\ BJ &= a - CJ = a - \left\{ b - [c - [a - (b - x)]] \right\} = BK, \text{ végül} \\ AK &= c - BK = c - \left\{ a - \left\{ b - [c - [a - (b - x)]] \right\} \right\}. \end{aligned}$$



Itt az a, b, c oldalak 2-2 előfordulása között három zárójel áll, mínusz jellel megelőzve, ezek tehát kiesnek, az x előtt pedig 6 mínusz jel áll, tehát $AK = x = AD$, így $K \equiv D$.

A DG szakasz L felezőpontjára

$$AL = \frac{1}{2}(AG + AD) = \frac{1}{2}(c - a + b).$$

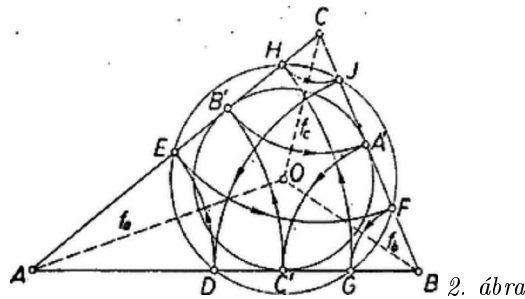
Ezt véve x gyanánt AG fenti kifejezéséből

$$AG' = (c - a + b) - x = \frac{1}{2}(c - a + b) = AL,$$

amit bizonyítanunk kellett.

Csirik János (Orosháza, Táncsics M. Gimn. II. o. t.)

II. megoldás. Tekintsük a háromszögbe írt kört, és jelöljük az AB, BC, CA oldalon levő érintési pontját C', A', B' -vel. Ekkor $AC' = AB', CB' = CA', BA' = BC'$, ha tehát D gyanánt C' -ből indulunk ki, akkor E a B' -be, F az A' -be és G a C' -be esik. Így a szerkesztés-sorozat 3. lépésével visszajutunk kiindulási pontunkba, ugyanígy minden további harmadikkal, tehát a hatodikkal is.



Legyen most D az AC' szakasz egy belső pontja, és tegyük fel, hogy E, F, G, H, J, K mindegyike a háromszög területén van. Akkor E a $B'A$ félegyenesen van, F az $A'B$ -n, G pedig $C'B$ -n. Továbbá a $C'B'$ és DE körívek közös középpontja A , és hasonlóan további két-két körív középpontja C , ill. B , ezért $DC' = EB' = B'E = A'F = FA' = GC'$. Eszerint a sorozat 3. lépésével G a D -nek C' -re való tükörképe. Ugyanígy látható be, hogy K a G -nek C' -re való tükörképe, tehát azonos D -vel. Ez az első bizonyítandó állítás.

Eredményünk szerint az L pont azonos C' -vel, ezt az esetet már fent megvizsgáltuk. Tehát D megválasztásától függetlenül egyetlen olyan pont van AB -n, melyből kiindulva a 3. lépésben érkezünk vissza.

Corradi Gábor (Győr, Czuczor G. Gimn. II. o. t.)

Megjegyzés. Lényegében ugyanígy, a koncentrikus körívpárok sugarai különbségének egyenlőségével is bizonyíthatjuk az állítást: $DG = EH = FJ = GK$, csak még azt kell belátnunk, hogy D és K a G -nek ugyanazon oldalán vannak.

Varga Kornél (Győr, Révai M. Gimn. I. o. t.)

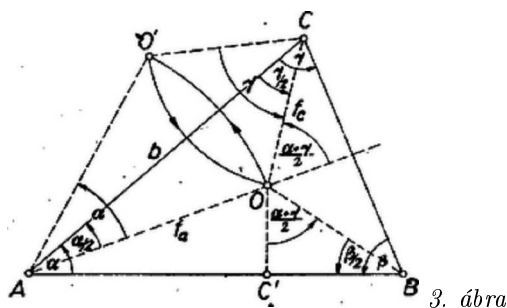
III. megoldás. Az E pont a D tükörképe a BAC szög f_a felezőjére vonatkozóan, és minden további pont is tükörképe az öt megelőzőnek a háromszög megfelelő szögfelezőjére. Eszerint D -t egymás után 6-szor tükröztük az egymást a beírt kör O középpontjában metsző $f_a, f_c, f_b, f_a, f_c, f_b$ egyenesekre. Így pedig a 6-ik tükörkép a 651. gyakorlat II. megoldása¹ szerint azonos a kiindulási ponttal.

A tükörképekből az is következik, hogy mindegyik szerkesztett pont egyenlő távolságra van O -tól, az O körül OD sugárral írt kör átmegy E, F, G, H, J -n. Eszerint D -t megválasztva a többi pontok csak e körnek az oldalakkal való metszéspontjai közül kerülhetnek ki. Mármost a DG húrnak O -hoz legközelebbi pontja az L felezőpont. L -ből kiindulva az OL sugarú körnek csak egy közös pontja van AB -vel, ezért a 3. lépés visszavezet L -be.

Lehel Csaba (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. I. o. t.)

Megjegyzés. Az első állítás minden kör köré írható sokszögre érvényes. Ez belátható, ha továbbfejlesztjük a fenti megfontolást, valamint azt a megállapítást, amit az idézett megoldás mond ki az egy ponton átmenő egyeneseken ciklikus sorrendben történő 2-szeri tükrözésre. Ugyancsak érvényes a második állítás is páratlan oldalszámú érintősokszögekre; páros oldalszám esetén viszont már az első körüljárás mindig visszavisz a kiindulási pontba (a G -nek megfelelő pont azonos D -vel).

Lehel Csaba



3. ábra

IV. megoldás. A 651/II. megoldás segédételének felhasználásával a végzett 3 forgatást egyetlen forgatássá tehetjük össze. Az A csúcson körül az óramutató járásával ellentétes (vagyis pozitív) irányú $BAC \sphericalangle = \alpha$ szögű forgatást a segédétel szerint tekinthetjük bármely két olyan tengelyen való egymás utáni tükrözés eredményének, melyek közös pontja A , és az első tengelyt a másodikba $+\alpha/2$ forgás viszi át. Első tengelynek f_a -t véve a második az $AC = b$ egyenes. Ugyanígy a C körüli $ACB \sphericalangle = +\gamma$ szögű forgatást helyettesíthetjük a b és f_c tengelyeken való tükrözéssel. Így a két forgatás végeredményét az f_a, b, b, f_c tengelyeken való egymás utáni tükrözés is megadja. Ámde a b tengelyen való (egymás utáni) kétszeri tükrözés minden pontot önmagába visz vissza, hatása nincs, ezért a két forgatás eredménye az f_a -n, majd f_c a való tükrözés. Ez pedig – ismét a segédétel szerint – egyetlen forgatás a tengelyek O metszéspontja körül, és pedig $a + \gamma$ szöggel, mert az f_a -t f_c -be vivő pozitív forgás egyenlő az ACO háromszög O -nál levő külső szögével, $(a + \gamma)/2$ -vel.²

Eszerint általában a Φ_1 és Φ_2 pontok körül φ_1 , ill. φ_2 szöggel végzett forgatás eredménye (ha $\varphi_1 + \varphi_2 \neq 0^\circ, \pm 360^\circ$) az az egyetlen forgatás, melynek Φ középpontja annak a két félegyenesnek a metszéspontja, amely a $\Phi_1\Phi_2$ szakasszal Φ_1 -ben $-\varphi_1/2$, ill. Φ_2 -ben $+\varphi_2/2$ szöget zár be, a forgatás szöge pedig $\varphi_1 + \varphi_2$.

Ennek alapján a B körüli, $CBA \sphericalangle = \beta$ szögű forgatást az első kettő eredményéhez adva a forgatási középpont O -nak az AB oldalon levő C' vetülete, a forgatási szög pedig $\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ$, vagyis az eredmény a C' pontra való tükrözés: $DC' = C'G$. Ugyanis $OBC' \sphericalangle = +\beta/2$, így a BOC' szög nagysága $90^\circ - \beta/2 = (\alpha + \gamma)/2$, iránya pedig negatív.

A további 3 forgatás végeredményeként G ismét visszajut D -be. Másrészt $L \equiv C'$, tehát L már 3 forgatással visszajut eredeti helyzetébe.

V. L.

Megjegyzések. 1. A számításban természetesen negatív eredmények is adódhatnak. Ha pl. E az AC szakasz C -n túli meghosszabbítására esik: $AE = x > AC = b$, akkor CE és CF negatívak. A számítás azt mutatja, hogy az állítás akkor is helyes, ha az ilyen szakaszokat ellentétes irányban mérjük fel, vagyis – a példát folytatva – CE -t BC -nek C -n túli meghosszabbítására. Ehhez az eredményhez jutunk akkor is, ha a forgatásokat mindig $+\alpha, +\gamma, +\beta$ szöggel végezzük, valamint ha a pontokat forgatás helyett a (belső) szögfelezőn való tükrözéssel jelöljük ki.

2. A számításból nyilvánvaló, hogy állításaink páratlan oldalszámú sokszögekre akkor is érvényesek, ha azokba nem írható kör.

¹K. M. L. 23 (1961/9) 20. o.

²Valóban, ha O tükörképe AC -re O' , akkor $OAO' \sphericalangle = 2OAC \sphericalangle = \alpha$, $OCO' \sphericalangle = \gamma$, tehát O -t az első forgatás O' -be viszi, O' -t pedig a második forgatás O -ba, tehát a két transzformáció eredményeként O visszajut eredeti helyére. Másrészt az irányok $+\alpha, +\gamma$ szöggel való elfordulásának összege $+(a + \gamma)$, szöggel való elfordulás.