

I. megoldás. A kérdésre a választ úgy keressük, hogy az adott egyenlőséghez hozzákapcsoljuk a minden derékszögű háromszögre fennálló

$$(2) \quad a^2 + b^2 = c^2,$$

$$(3) \quad ab = cm = 2t$$

egyenlőségeket (ahol c az átfogó és t a háromszög területe), és a nyert 4 ismeretlenes egyenletrendszert megoldjuk. Ha van megoldás, akkor válaszunk *igen*. Előre látható, hogy határozott megoldást nem kaphatunk, hiszen csak 2 ismeretlent küszöbölhetünk ki. Várható azonban, hogy az ismeretlenek arányát, a háromszög alakját meghatározhatjuk. Ugyanis (1)–(3) egyikében sincs ismeretlent nem tartalmazó tag, továbbá (1) négyzetre emelése után egyenleteink mindegyikében minden tag fokszáma ugyanannyi (szokásos kifejezéssel: mindegyik egyenlet homogén). (1)-ből

$$(1') \quad 25m^2 = 9b^2 - 16a^2.$$

Küszöböljük ki a rendszerből m -et és c -t. (3)-ból (2) figyelembevételével

$$m^2 = \frac{a^2b^2}{c^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2},$$

és így (1')-ből átszorzással

$$\begin{aligned} 25a^2b^2 &= (a^2 + b^2)(9b^2 - 16a^2) = -16a^4 - 7a^2b^2 + 9b^4, \\ 16a^4 + 32a^2b^2 - 9b^4 &= 0. \end{aligned}$$

Mindkét oldalhoz $25b^4$ -t adva a bal oldal teljes négyzet, és pedig pozitív érték négyzete: $(4a^2 + 4b^2)^2 = 25b^4$, tehát $4a^2 + 4b^2 = 5b^2$, amiből $4a^2 = b^2$, és mivel a és b is pozitív, $2a = b$, $b : a = 2$.

Eszerint van a kérdéses tulajdonsággal bíró háromszög.

Torda Zsuzsa (Budapest, Berzsenyi D. lg. I. o. t.)

II. megoldás. Más alakban jellemezhetjük a háromszöget, ha (1)-höz (2) és (3) helyett a velük lényegében egyenértékű

$$m^2 = c_1c_2, \quad a^2 = cc_1, \quad b^2 = cc_2, \quad c_1 + c_2 = c$$

egyenleteket kapcsoljuk hozzá. Itt c_1 és c_2 az a és b vetülete az átfogón. Így több egyenlet révén, de egyszerűbben, csak másodfokú egyenlet megoldásával jutunk eredményhez. Első három segédegysenetünk alapján (1') négyzetes tagjait, majd a negyedik alapján c^2 -t kiküszöbölve:

$$\begin{aligned} 25c_1c_2 &= 9cc_2 - 16cc_1; \\ 25c_1(c - c_1) &= 9c(c - c_1) - 16cc_1, \\ 25c_1^2 - 50cc_1 + 9c^2 &= 0, \quad \text{amiből} \quad (5c_1 - 5c)^2 = 4c^2, \end{aligned}$$

és mivel $c_1 < c$, azért $-5c_1 + 5c = 4c$, $c_1 = c/5$. Ekkor $c_2 = 4c/5$, tehát (1) akkor áll, ha m talppontja az átfogót $1 : 4$ arányban osztja két részre.

Tihanyi László (Budapest, Petőfi S. g. I. o. t.)