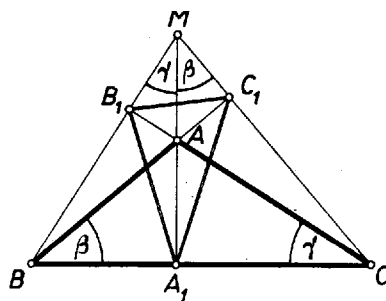


a) A 637. gyakorlat megoldása¹ során említésre került, hogy ha az $ABC = H$ háromszögben $BAC \angle = \alpha > 90^\circ$, akkor – M -mel a magasságpontot jelölve – az $MCB = H_1$ háromszög hegyesszögű és talpponti háromszöge – a csúcsok sorrendjét tekintve is – azonos H -nak $A_1B_1C_1 = T$ talpponti háromszögével, továbbá H_1 magasságpontja A (1. ábra).

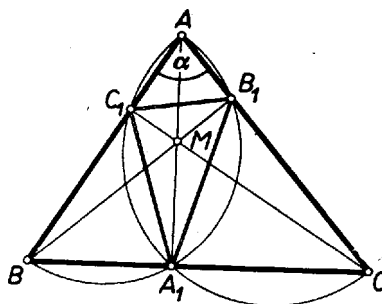


1. ábra

Valóban az MCB háromszögben

A_1 a CB egyenesen van, $MA_1 \perp CB$ és MA_1 átmegy A -n,
 B_1 a BM „ „ „ „ $CB_1 \equiv CA \perp BM$ és CB_1 átmegy A -n,
 C_1 az MC „ „ „ „ $BC_1 \equiv BA \perp MC$ és BC_1 átmegy A -n.

Hasonlóan bizonyítható, hogy a $BAM = H_2$ és $CMA = H_3$ háromszögek talpponti háromszöge ugyancsak T (sorrendre nézve is), magasságpontjaik pedig C , ill. B . – Könnyű belátni, hogy ekkor H_2 ben is, H_3 -ban is az A csúcsnál tompaszög van, továbbá azt is, hogy hegyesszögű H -ból kiindulva is H_1, H_2, H_3 talpponti háromszöge mindig T , és magasságpontjuk rendre A, C, B (2. ábra).



2. ábra

Ezzel T -hez felsoroltunk 4 különböző olyan háromszöget, melyben a magasságtalppontok éppen T csúcsai. Megmutatjuk, hogy több ilyen háromszög nincs.

A 637. gyakorlat megoldásában azt is láttuk, hogy ha ABC és ACB hegyesszögek, akkor az A_1A magasság A_1B_1 -gyel és A_1C_1 -gyel egyenlő szögeket zár be, és B_1, C_1 e magasság két oldalán vannak. Eszerint A_1A felezi a $B_1A_1C_1$ szöget. Hasonlóan látható be, hogy bármely nem derékszögű háromszög 3 magasságegyenese és 3 oldalegyenese felezi a talpponti háromszög egy belső vagy egy külső szögét, és így a talpponti háromszög mindegyik csúcsában a belső és külső szögfelezők egyike oldalegyenes, a másika pedig magasságegyenes.

Eszerint azon háromszögek oldalegyenesei, melyeknek talpponti háromszöge egy előre adott T háromszög, csak T belső és külső szögfelezői közül kerülhetnek ki. A mondott háromszögek csúcsai pedig csak a szögfelezők metszéspontjai közül valók lehetnek. – Ámde a belső és külső szögfelezők bármely háromszögre nézve 3-asával 4 pontban, a 4 érintő kör (a beírt kör és a 3 hozzáírt kör) középpontjában metszik egymást, ezeken (és a háromszög csúcsain) kívül más közös pontjuk nincs. E 4 pont közül egy háromszög csúcsait valóban csak 4-féleképpen lehet választani (közülük sorra 1-et–1-et elhagyva). Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

b) A 637. gyakorlat megoldása szerint, ha a háromszög szögei α, β, γ és ezek mindegyike hegyesszög, akkor talpponti háromszögének szögei:

$$(1) \quad \alpha' = 180^\circ - 2\alpha, \quad \beta' = 180^\circ - 2\beta, \quad \gamma' = 180^\circ - 2\gamma;$$

ha pedig $\alpha > 90^\circ$, akkor T szögei:

$$(2) \quad \alpha' = 2\alpha - 180^\circ, \quad \beta' = 2\beta, \quad \gamma' = 2\gamma.$$

¹K. M. L. 22 (1961) 110. o.

Adatainkat az (1) képletekkel csak egyféleképpen azonosíthatjuk, mert ez a 3 képlet azonos szerkezetű; a

$$180^\circ - 2\alpha = 24^\circ, \quad 180^\circ - 2\beta = 60^\circ, \quad 180^\circ - 2\gamma = 96^\circ$$

egyenletrendszerből

$$\text{I :} \quad \alpha = 78^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 42^\circ.$$

A (2) képlethármassal való azonosítás viszont 3 féleképpen lehetséges aszerint, hogy a megkülönböztetett $2\alpha - 180^\circ$ szerepet az adott szögek melyike kapja. A

$$\begin{array}{lll} 2\alpha - 180^\circ = 24^\circ, & 2\beta = 60^\circ, & 2\gamma = 96^\circ \quad \text{rendszerből} \\ \text{II :} & \alpha = 102^\circ, & \beta = 30^\circ, \quad \gamma = 48^\circ, \end{array}$$

és hasonlóan adódnak a

$$\begin{array}{lll} \text{III :} & 12^\circ, & 120^\circ, & 48^\circ \quad \text{és} \\ \text{IV :} & 12^\circ, & 30^\circ, & 138^\circ \end{array}$$

megoldások.

Annak belátására, hogy az I–IV szöghármasok valóban egy-egy háromszög szögei, elég rámutatni, hogy (1) és (2)-ből $\alpha + \beta + \gamma$ értéke

$$270^\circ - \frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{2} \quad \text{ill.} \quad 90^\circ + \frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{2},$$

viszont az adott szögek összege $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180^\circ$.

Geschek Péter (Budapest, József A. g. II. o. t.)