

a) A szélső tagok nevezőinek $2x - 8$ összege egyenlő a közbülső két tag nevezőjének összegével. Ezért megpróbálhatjuk új ismeretlennek venni ezen összeg felét. $x - 4 = z$, azaz $x = z + 4$ helyettesítéssel, a szélső és közbülső tagpárok közös nevezőre hozásával

$$(1) \quad \left(\frac{1}{z+3} + \frac{5}{z-3} \right) + \left(\frac{3}{z+1} - \frac{9}{z-1} \right) = \frac{6(z+2)}{z^2-9} - \frac{6(z+2)}{z^2-1} = \\ = 6(z+2) \left(\frac{1}{z^2-9} - \frac{1}{z^2-1} \right) = 0.$$

Eszerint $z+2=0$ megoldást ad: $z=-2$, és így $x=2$. A második zárójel nem lehet 0, mert z^2-9 és z^2-1 különbözők, reciprokaik szintén, tehát különbségük nem 0. Eszerint az egyenletnek csak egy gyöke van.

b) Itt is fennáll a fent látott összefüggés, de jól használhatjuk azt is, hogy két-két számláló összege 0. E tagokat páronként összeadva

$$3 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3} \right) = 5 \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-1} \right), \quad \frac{-12}{x^2-2x-3} = \frac{20}{x^2-6x+5}.$$

Feltéve, hogy egyik nevező sem 0, és véve a két oldal reciprokát, rendezés után

$$x(2x-7)=0, \quad \text{és innen} \quad x_1=0, \quad x_2=3,5,$$

egyik sem kizárt érték. Valóban, mindkettő kielégíti az egyenletet.

c) Az a) esethez hasonló rendezéssel

$$\frac{6(9x+8)}{x^2-9} - \frac{6(x+8)}{x^2-1} = \frac{48(x^3+8)}{(x^2-1)(x^2-9)} = 0.$$

A számlálóbeli kéttagú kifejezés a $8 = 2^3$ észrevétel alapján szorzattá alakítható:

$$x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2-2x+2^2).$$

Mostmár $x+2=0$ -ból $x=-2$ (evvel egyik nevező sem 0), a második tényező viszont nem lehet 0, mert bármely x mellett pozitív:

$$x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 \geq 3,$$

tehát több gyök nincs.

d) Legyen az a) esethez hasonlóan $x - 0,5 = z$. Így

$$3 \left(\frac{1}{z-2,5} + \frac{1}{z+2,5} \right) - \left(\frac{1}{z-1,5} + \frac{1}{z+1,5} \right) = \frac{6z}{z^2-6,25} - \frac{2z}{z^2-2,25} = \\ = \frac{4z(z-0,5)(z+0,5)}{(z^2-6,25)(z^2-2,25)} = 0,$$

ami csak $z_1=0$, $z_2=0,5$ és $z_3=-0,5$ mellett teljesülhet. Ezek mindegyike megoldást ad, mert velük mind a négy nevező 0-tól különböző szám, éspedig

$$x_1=0,5, \quad x_2=1, \quad x_3=0.$$

Ámon Magdolna (Győr, Zrínyi Ilona lg. II. o. t.)

Megjegyzés. A gyakorlat kitűzésekor a versenyzők figyelmébe ajánlottuk a 626. gyakorlat megoldását,¹ amely néhány feltételt adott arra, hogy az

$$\frac{A}{mx+n} + \frac{B}{px+q} + \frac{C}{rx+s} + \frac{D}{tx+u} = 0$$

egyenlet megoldható legyen (vegyes) harmadfokú egyenletre vonatkozó ismeretek nélkül. Mint láttuk, mind a négy egyenletünk ebbe a típusba tartozik. Az a) esetben

$$\frac{A}{m} + \frac{B}{p} + \frac{C}{r} + \frac{D}{t} = 1 + 3 - 9 + 5 = 0,$$

és a bal oldal tagjainak összevonásával – a fenti (1)-et tovább alakítva nem kapunk harmadfokú tagot a számlálóban, amint az idézett helyen általában láttuk a (4) előtti feltételben. Hasonlóan a b) és d) egyenletre az ottani (4a) feltétel teljesül:

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{q} + \frac{C}{s} + \frac{D}{u} = 0, \quad \text{mert} \quad 3 - 5 + 1 + 1 = 0, \quad \text{ill.} \\ -1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 0.$$

A c) esetben látott egyszerűsödést a 626. gyakorlat a feltétel felírása nélkül említette.

¹K.M.L. 22 (1961) 67. o.