

I. megoldás: A feltétel első egyenletéből $a = c + d - b$ -t a másodikba helyettesítve

$$c^2 + d^2 + b^2 + 2cd - 2bc - 2bd + b^2 = c^2 + d^2.$$

Innen rendezés és egyszerűsítés után szorzattá alakítással

$$b^2 - bc - bd + cd = b(b - c) - d(b - c) = (b - c)(b - d) = 0.$$

Eszerint a $b - c = 0$ és $b - d = 0$ egyenlőségek közül legalább az egyik fennáll. Mármint (1)-ből, ha $b - c = 0$, azaz $b = c$, akkor $a = d$, ha pedig $b - d = 0$, azaz $b = d$, akkor $a = c$. Ezzel az állítást igazoltuk. (Természetesen lehet mind a négy érték is egyenlő.)

Tichy Géza (Budapest, Árpád g. II. o. t.)

II. megoldás. Írjuk (1) és (2)-t így

$$(1') \quad a - c = d - b, \quad a^2 - c^2 = d^2 - b^2,$$

másképpen

$$(2') \quad (a - c)(a + c) = (d - b)(d + b).$$

Ha (1') mindkét oldala 0, akkor nincs mit bizonyítanunk, hiszen $a = c$, és $b = d$. Ha pedig (1') két oldalán 0-tól különböző szám áll, evvel (2')-t egyszerűsítve

$$a + c = d + b.$$

Ehhez (1')-t előbb hozzáadva, majd belőle kivonva $a = d$, ill. $c = b$ -re jutunk, ami az állítást igazolja.

Mihályi Zoltán (Budapest, Rákóczi F. g. II. o. t.)

III. megoldás. Legyen (1), ill. (2) két oldalának közös értéke p , ill. r , és tekintsük a , b , c , d -t ismeretleneknek. Vonjuk ki (1) négyzetéből (2)-t, majd egyszerűsítsünk 2-vel:

$$(3) \quad \begin{aligned} p^2 - r &= (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = (c + d)^2 - (c^2 + d^2) \\ \frac{p^2 - r}{2} &= q = ab = cd. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a és b az $a + b = p$, $ab = q$ egyenletrendszer megoldása. Innen bármelyik ismeretlen kiküszöbölésével az

$$(4) \quad x^2 - px + q = 0$$

egyenletre jutunk, ahol x az a és b bármelyikét jelentheti. Így a , b -re két értékrendszert kapunk, de ezek egymástól csak sorrendben különböznek.

A $c + d = p$, $cd = q$ egyenletrendszer ugyancsak (4)-re vezet. Ámde (4)-nek legfeljebb 2 szám tesz eleget, ezért a c , d számpár valamelyik sorrendben megegyezik az a , b számpárral.

Ha (4) gyökei egyenlők, akkor mindkét egyenletrendszernek csak egy szám tesz eleget és $a = b = c = d$.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Egyenleteinknek geometriai jelentést tulajdoníthatunk (2) szerint az a , b és c , d befogópárokkal szerkesztett derékszögű háromszögek átfogója egyenlő. (3) szerint pedig területeik is egyenlők, ezért a két háromszögben az átfogóhoz tartozó magasságok is egyenlők. Ezért a két háromszöget a közös átfogóval mint átmérővel bíró Thalész-félkörbe beillesztve vagy fedik egymást, vagy egy szimmetrikus trapéz csúcsait jelölik ki, és így mindenképpen egybevágók.

Pusztai Dénes (Budapest, I. István g. I. o. t.)

2. Az eredeti feltétel-pár egy geometriai értelmezése a következő. Szorítkozzunk arra az esetre, amikor az a , b , c , d szakaszokból lehet négyszöget szerkeszteni, pl. az a , c , b , d sorrendben, és ez a négyszög konvex. Ekkor (1) szerint a négyszög érintőnégyszög, (2)-ből az következik,¹ hogy átlói merőlegesek, végül a 607. gyakorlatban² konvex érintőnégyszög átlói merőlegességének szükséges és elégséges feltételül azt találtuk, hogy a négyszögben 2–2 szomszédos oldalpárnak egyenlőnek kell lennie. Eszerint vagy $a = c$ és $b = d$ vagy $a = d$ és $b = c$; természetesen mindkét egyenlőségpár is teljesülhet.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

¹Lásd *Kürschák-Neukomm-Surányi: Matematikai Versenykérdések I.* (Tankönyvkiadó, 1955) 99. o.: „Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha két szemben fekvő oldal négyzetének összege egyenlő a másik két oldal négyzetének összegével”.

²K. M. L. 21 (1960), 140. o.