

$1599 = 1600 - 1 = 40^2 - 1^2 = 39 \cdot 41 = 3 \cdot 13 \cdot 41$, az utolsó alakban mind a három tényező törzsszám. Ezért az N szám akkor és csak akkor osztható 1599-cel, ha 3, 13 és 41 mindegyikével osztható.

N -ről előbb azt kell belátnunk, hogy egész szám, hiszen oszthatóságról csak így lehet szó. Megmutatjuk, hogy a nevező minden tényezőjével lehet egyszerűsíteni. Evégett $n!$ minden tényezőjét törzsszámhatványok szorzatára felbontott alakjában gondoljuk előállítva.

Egy tetszés szerinti p törzsszám a többszöröseinek, a $p, 2p, 3p, \dots$ számoknak szorzatfelbontásában lép fel, és csak ezekben. E számok a természetes számok $1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots$ sorozatában (az elejétől számítva) minden p -edik helyet foglalnak el. A többszörösök helyére a p -vel való osztásuk $1, 2, 3, \dots$ hányadosát írva ezekben is találunk p -vel osztható számokat. Ezek p^2 többszöröseinek helyén állnak és az eredeti sorozatban az elejétől számítva minden p^2 -edik helyet foglalnak el, belőlük egy második p -tényező is kiemelhető. Hasonlóan az eredeti sorozat minden p^3 -odik, p^4 -edik, $\dots$ számából egy további, vagyis 3-ik, 4-ik, $\dots$, p -tényező is kiemelhető. Ebből nyilvánvaló, hogy a természetes számok sorozatában *akárhonnan* kiindulva *az első p lépésen belül* találunk p -vel osztható számot, az első p^2 , az első p^3 , $\dots$ lépésen belül találunk p^2 -nel, p^3 -nel, $\dots$ osztható számot.

Írjuk mármost N -et a számláló első 1700 tényezőjével (törzsszám szorzatra való felbontás nélkül) egyszerűsítve az

$$N = \frac{1701 \cdot 1702 \cdot 1703 \cdot \dots \cdot 3399 \cdot 3400}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1699 \cdot 1700}$$

alakban. Itt a számláló és a nevező egyaránt 1700 egymás utáni tényezőt tartalmaz. Ha p bármely a nevezőben fellépő, vagyis 1700-nál nem nagyobb törzsszám, akkor a fentiek szerint a nevező p tényezőjéhez találunk a számláló első p tényezője között egy p -vel oszthatót, legyen ez q , ezeket p -vel egyszerűsítjük. Hasonlóan a nevező $2p, 3p, \dots$ tényezőjét és a számláló $q + p, q + 2p$ tényezőjét is páronként p -vel egyszerűsíthatjuk. Ha a nevezőben eredetileg a $p^2, p^3, \dots$ hatvány is fellépett, vagyis $p^2 < 1700$, ill. $p^3 < 1700$, akkor a számláló eredeti tényezői között is volt p^2 -nel, p^3 -nel osztható – éspedig ugyanannyi, mint a nevezőben –, tehát minden szóbjövő p minden a nevezőben szóbjövő hatványával egyszerűsíthetünk. Így N valóban egész szám.

Ezekkel a feladat tulajdonképpen megoldását is előkészítettük, már csak ez a kérdés: maradt-e N számlálójából az egyszerűsítés után 3-as, 13-as, 41-es tényező. Kiszámítjuk, hányszor lépett fel tényezőként pl. 41 a számlálóban és hányszor a nevezőben. N eredeti alakjából indulunk ki.

A számlálóban annyi 41-gyel osztható tényező van, amennyi a $3400 : 41$ osztás hányadosának egész része, vagyis 82 (a maradék 38; tehát 3-mal továbbmenve, 3403-ban találunk ismét 41-gyel osztható számmra). Egy-egy további 41-es tényező $82 : 41 = 2$ számban szerepel. (Nincs maradék.) Harmadik 41-es tényezőt tartalmazó szám nincs, mert $2 : 41$ egész része 0 (másképpen, mert $41^3 > 3400$), tehát a 41-es tényezők száma 84. – Hasonlóan az 1700! számban 42, négyzetében 84 db 41-es tényező van. Eszerint N számlálójából az egyszerűsítéssel minden 41-es tényező eltűnik, N nem osztható 41-gyel. Így a 3-as és a 13-as törzsszám vizsgálata nélkül kimondhatjuk, hogy N 1599-cel sem osztható.

Kászonyi László (Szombathely, Nagy Lajos g. II. o. t.) dolgozatából, kiegészítéssel.

Megjegyzések. 1. A legutóbbi osztások maradékaiban fordított sorrendben megkaptuk a 3400-as szám 41-es alapú számrendszerbeli alakjának számjegyeit: $3400 = 2 \cdot 41^2 + 0 \cdot 41 + 38$. Így azt az n kitevőt, amellyel 41 a 3400!-ban foglaltatik, LEGENDRE idevágó tétele¹ alapján is kiszámíthatjuk:

$$\frac{3400 - (2 + 0 + 38)}{41 - 1} = \frac{3360}{40} = 84.$$

Fazekas Patrik (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. II. o. t.)

2. Hasonlóan kapjuk, hogy N -ben 3 kitevője 6, 13 kitevője 2.

3. A dolgozatok természetesnek vették, hogy N egész szám, csak néhányan hivatkoztak arra, hol található ennek bizonyítása.² Ezt nem tekintettük hiánynak, bár többen így válaszoltak: „az adott törtszám nem osztható 1599-cel.” – Sokan helyes választ adtak, de ezt arra alapították, hogy 1599 törzsszám. Ezek hibásak.

¹ Lásd pl. *Kürschák-Hajós-Neukomm-Surányi*: Matematikai versenytételek I. rész (Tankönyvkiadó, 1955), 128. o.

² *Faragó László*: Matematikai szakköri feladatgyűjtemény. Középiskolai szakköri füzet (Tankönyvkiadó 1955) 175. feladat, 21. o.