

Mindkét számkifejezés 2-ik és 3-ik tagjában a gyökjel alatt ún. „kapcsolt” kifejezések állnak, amelyeknek szorzata racionális, éppen 1-gyel egyenlő. Ezért várható, hogy ha kifejezéseinket

$$\sqrt{2} - \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right), \quad \sqrt{6} - \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)$$

alakban írjuk és a zárójelbeli kéttagúakat négyzetük négyzetgyökével pótoljuk, egyszerűbb kifejezést kapunk. Valóban

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \mp \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^2 = 2 + \sqrt{3} \mp 2\sqrt{1} + 2 - \sqrt{3} = 4 \mp 2,$$

vagyis 2, ill. 6, tehát a zárójel értéke $\sqrt{2}$, ill. $\sqrt{6}$. Így pedig mindkét szám 0-val egyenlő, nincs előjele.

Tamás Géza (Makó, József A. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A zárójelbeli kéttagúak helyére az ismert

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

azonosság-pár¹ felhasználásával egytagúakat írhatunk, ugyanis

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} \mp \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{\frac{A \mp \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Esetünkben $A = 2$, $B = 3$, ezért $A^2 - B = 1$, tehát a jobb oldalon $\sqrt{2}$, ill. $\sqrt{6}$ áll.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

2. Ha a belső gyökjelek alatt álló „3” szám helyett x -et írunk, kifejezéseink x függvényei:

$$y_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{x}} - \sqrt{2 + \sqrt{x}}, \quad y_2 = \sqrt{6} - \sqrt{2 - \sqrt{x}} - \sqrt{2 + \sqrt{x}}.$$

Értéküket $x = 0$ és $x = 4$ mellett könnyen megkapjuk. Azt találjuk, hogy az előbbi helyen y_1 pozitív, y_2 negatív, az utóbbin pedig megfordítva, vagyis mindkét függvény grafikonjában az $x = 0$ és $x = 4$ -hez tartozó pontok az X -tengely ellentétes oldalán vannak. Kézenfekvő azt gondolni, hogy y_1 és y_2 folytonosan változnak, tehát $x = 0$ és $x = 4$ között minden a talált két-két érték közti értéket felvesznek (esetleg még mást is), így a 0-t is. (Szemléletesen: grafikonjuk folytonos vonal, és így valahol átmetszi az X -tengelyt.) Ha tudnánk, hogy y_1 és y_2 a 0 értéket $x = 0$ és $x = 4$ között csak egyszer veszik fel, akkor ez az x érték a 0-tól 4-ig terjedő számközt olyan két részre vágná szét, amelyek egyikében a függvény pozitív, a másikban negatív, tehát előjele könnyen megállapítható. Megkeresve, hogy mely x -ekre teljesülhet $y_1 = 0$, ill. $y_2 = 0$ (vagyis megoldva x -re ezt a két egyenletet), azt kapjuk, hogy mindkét függvényre csak az $x = 3$ hely jöhet szóba. Itt függvényeink értéke éppen a két adott számkifejezés. Ha tehát a függvények folytonosságáról tett feltevésünk helyes, akkor $x = 3$ -ra $y_1 = 0$ és $y_2 = 0$.

E meggondolás helyességét azonban csak a középiskolában tanultaknál mélyebb fogalmakkal és ismeretekkel lehet belátni. A gondolatmenet a fenténél bonyolultabb formában Fazekas Patrik (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. II. o. t.) dolgozatában szerepel, ő a „2” szám helyett is változót írt.

¹Lásd pl. Faragó L.: Matematikai szakköri feladatgyűjtemény. Középiskolai Szakköri Füzetek. (Tankönyvkiadó 1955.) 71. o. 80. feladat.