

I. megoldás. A számláló tagjai úgy állíthatók párokba, hogy a párok kitevőinek különbségei egyenlők (1-et x^0 alakban írva): $8-5=7-4=3-0=3$. Eszerint – és az együtthatókra is, tekintettel – a számlálóból x^3-1 kiemelhető:

$$(x^8 - x^5) + (x^7 - x^4) + (x^3 - 1) = (x^3 - 1)(x^5 + x^4 + 1).$$

A nevező pedig:

$$x^4(x^2 - 1) + (x - 1) = (x - 1)[x^4(x + 1) + 1] = (x - 1)(x^5 + x^4 + 1),$$

eszerint $x^5 + x^4 + 1$ közös tényezőjük. Ismeretes továbbá, hogy $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, így $x - 1$ -gyel is egyszerűsítve az adott kifejezés $x^2 + x + 1$ -gyel egyenlő, minden olyan x -re, amelyre az eredeti nevező nem 0.

Hallósy Katalin (Szeged, Radnóti M. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. $x = 1$ esetén $x - 1 = 0$, és ezért az egyszerűsítésnek nincs értelme, de magának a kifejezésnek sincs, hiszen ekkor a számláló és a nevező mindegyike 0. Úgyszintén akkor sincs, ha $x^6 + x^4 + 1 = 0$. Ilyen x van, éspedig -2 és -1 között, mert $x = -2$ -re a bal oldal értéke $-15 < 0$, $x = -1$ -re pedig $+1 > 0$.

Szaniszló Mária (Debrecen, Mechwart A. gépip. t. I. o. t.)

2. A nevezőből is kiemelhető $x^3 - 1$, ugyanis: $(x^6 - 1) - (x^4 - x) = (x^3 - 1)(x^3 + 1 - x)$. Így azonban a számlálóról csak bonyolultabb átcsoportosítás után látjuk, hogy osztható $x^3 - x + 1$ -gyel, mert $x^5 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$.

Doskar Balázs (Budapest, Piarista g. I. o. t.)

II. megoldás. Megpróbálhatjuk az egyszerűsítést avval megkönnyíteni, hogy a számlálót osztjuk a nevezővel, és majd csak a maradék és a nevező hányadosát egyszerűsítjük. Az osztás 0 maradékra és $x^2 + x + 1$ hányadosra vezet, tehát kifejezésünk ezzel az egyszerűbb kifejezéssel egyenlő.

Szilágyi Tibor (Ózd, József A. g. I. o. t.)