

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy x - és y -nak nemnegatív egész értékeket adva (1) bal oldalával bármely 7-nél nagyobb egész szám előállítható. $x = 0$ -val $k = 3y$, tehát $k = 0, 3, 6, 9, 12, \dots$, azaz minden 3-mal osztható nemnegatív szám előállítható. $x = 1$ -gyel $k = 3y + 5 = 3(y + 1) + 2$, tehát $k = 5, 8, 11, \dots$, azaz minden egész szám előállítható, amely 3-mal osztva maradékul 2-t ad és 5-nél nem kisebb. Végül $x = 2$ -vel $k = 3y + 10 = 3(y + 3) + 1$, tehát $k = 10, 13, 16, \dots$, azaz minden számot megkapunk, amely 3-mal osztva maradékul 1-et ad és 10-nél nem kisebb.

Minden egész szám vagy osztható 3-mal, vagy pedig a 3-mal való osztásnál a maradéka 2, vagy 1, ezért minden természetes számot megkapunk a 2, és az 1, 4, 7 kivételével. Ezeket nagyobb x -értékekre sem kaphatjuk meg, mert ha $x = 3l + r$, ahol $l \geq 1$ és $r = 0, 1$ vagy 2, akkor $5x + 3y = 5r + 3(y + 5l) = 5r + 3y'$, ahol $y' = y + 5l > y \geq 0$, tehát $5x + 3y$ előfordul a felírt három számsorozat valamelyikében.

A négy kiemelt szám legnagyobbika 7, tehát valóban minden a 7-nél nagyobb egész k számhoz van olyan nemnegatív egész x, y számpár, amellyel (1) teljesül.

Ha csak pozitív egész értékeket engedünk meg x és y részére, akkor $x = 1, 2, 3$ -mal $k = 3y + 5, 3y + 10$, ill. $3y + 15$ -ből $y = 1, 2, 3, \dots$ mellett a

$$k = 8, 11, 14, 17, \dots; k = 13, 16, 19, 22, \dots; k = 18, 21, 24, 27, \dots$$

értékeket kapjuk meg, és nem kapjuk meg e sorozatok visszafelé való folytatásának számait, így a természetes számok közül az 5, 2; 10, 7, 4, 1; 15, 12, 9, 6, 3 számokat. Ezek legnagyobbika 15, ez a keresett érték.

Bod Katalin (Miskolc, Herman O. lg. II. o. t.)

II. megoldás. (1)-ből

$$y = \frac{k - 5x}{3} = \frac{k - 6x + x}{3} = -2x + \frac{k + x}{3} = -2x + u,$$

ahol u egész szám, mert y és $-2x$ egészek.

$$u = \frac{k + x}{3} \text{ -ből}$$

$$(2) \quad x = 3u - k, \quad \text{és így}$$

$$(3) \quad y = -2(3u - k) + u = -5u + 2k.$$

A (2), (3) képletpár bármely egész k mellett, és tetszés szerinti egész u értéket választva egy x, y egész megoldását adja (1)-nek.

Ámde x, y -ra csak nemnegatív, ill. csak pozitív egész számokat engedünk meg, így u értéke korlátozott.

Az $x \geq 0, y \geq 0$ követelésből

$$3u - k \geq 0, \quad -5u + 2k \geq 0, \quad \text{azaz} \quad u \geq k/3, \quad u \leq 2k/5,$$

összefoglalva

$$(4) \quad \frac{k}{3} \leq u \leq \frac{2k}{5}, \quad \text{amiből} \\ 5k \leq 15u \leq 6k.$$

Eszerint adott k mellett csak akkor található megfelelő u -érték, ha egyrészt $5k \leq 6k$, vagyis $k \geq 0$, másrészt $5k$ és $6k$ közé esik 15-tel osztható szám, a számegyenes $5k$ és $6k$ pontjai közé egy 15-tel osztható szám képe – a végpontokat megengedve.

Ha pedig $x > 0, y > 0$, akkor (az „=” jelek elhagyásával a megoldhatóság feltétele) $5k < 15u < 6k$, vagyis a 15-tel osztható szám képe az $(5k, 6k)$ szakasz belsejébe kell esnie. E szakasz hossza $6k - 5k = k$, ezért nyilvánvaló, hogy $k > 15$ esetén legalább egy 15-tel osztható szám képe esik a belsejébe, mert az ilyen számokat ábrázoló pontok közti legrövidebb távolság 15 egység. $k = 15$ esetén viszont maguk $5k$ és $6k$ a 15-tel oszthatók, nincs megfelelő u , ezért (1)-nek nincs megoldása. Eszerint a második kérdésben keresett egész szám: 15.

Most már az első kérdésre elég a $k = 8, 9, \dots, 15$ számokra megmutatnunk a feltétel teljesülését. Valóban, ha

$$\begin{array}{cccccccc} k = & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & \text{akkor} \\ 5k = & 40, & 45, & 50, & 55, & 60, & 65, & 70, & 75, & \\ 6k = & 48, & 54, & 60, & 66, & 72, & 78, & 84, & 90, & \text{és így megfelel:} \\ 15u = & 45, & 45, & 60, & 60, & 60, & 75, & 75, & 75, & \end{array}$$

Pl. $15u = 45$, azaz $u = 3$ -mal $k = 9$ mellett (2) és (3)-ból $x = 0, y = 3$. $k = 7$ -re viszont az $(5k, 6k) = (35, 42)$ számköz a végpontjait is hozzászámítva sem tartalmazza 15-nek egy többszörösét sem.

Gaul Géza (Budapest, József A. g. II. o. t)