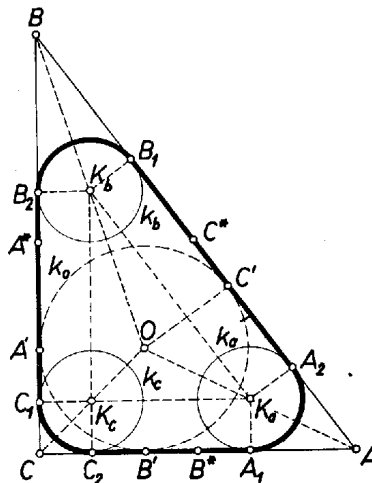


A szokásos jelölésekkel az ABC háromszög belsejében a $\varrho/2$ sugarú k kör egy oldal mentén addig tolható, míg az egyik szomszédos oldallal is érintkezésbe jut, pl. a CA oldal mentén A felé addig, míg AB -t A_2 -ben érinti. Legyen k ezen k_a helyzetének középpontja K_a és CA -n levő érintési pontja A_1 . Ekkor k nem sűrölhatja a körív és érintői határolta konkáv A_1AA_2 idom területét.



Az ábra további hasonló jelöléseit használva a sűrölt idom a körívek és egyenesszakaszok határolta konvex $A_1A_2B_1B_2C_1C_2 = H$ idom. Ennek t_s területét úgy kaphatjuk, hogy az $ABC\Delta t$ területéből kivonjuk az AA_2A_1 , BB_2B_1 , CC_2C_1 konkáv idomok területének összegét. Ugyanis k -t egy-egy háromszögoldal mentén gördítve a sűrölt idomnak az oldaltól leg-távolabb levő pontjai az oldaltól átmérőnyi, vagyis ϱ távolságra vannak. A kör tehát H -nak csak olyan pontjait nem sűrölné, amelyek mindhárom oldaltól ϱ -nál nagyobb távolságra vannak. A háromszög belsejének a kerülettől legtávo-labbi pontja azonban a beírt k_0 kör O középpontja, amely mindhárom oldaltól ϱ távolságra van, tehát k a H idom minden pontját sűrölja.

k_0 -nak az oldalakon levő érintési pontjait A' , B' , C' -vel jelölve a nem sűrölt görbevonalú háromszögek rendre ha-sonlók a k_0 -on kívül eső $B'AC'$, $C'BA'$, $A'CB'$ idomokhoz, mert hasonló helyzetűek azokhoz, a hasonlóság középpontja rendre A , B , C . A megfelelő szakaszok aránya mindenütt $K_aA_1 : OB' = 1 : 2$, ezért a területek aránya $1 : 4$. Eszerint a k által nem sűrölt háromszögek együttes területe negyedrésze annak a területnek, amely az ABC háromszögből a beírt kör elvétele után marad, vagyis

$$(1) \quad \frac{1}{4}(t - \varrho^2\pi) = \frac{t}{4} - \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2\pi.$$

Ennélfogva a sűrölt terület

$$t_s = \frac{3t}{4} + \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2\pi = \frac{3ab}{8} + \left(\frac{a+b-c}{4}\right)^2\pi,$$

ugyanis a beírt kör átmérője

$$\begin{aligned} 2\varrho &= OA' + OB' = B'C + A'C = (AC - AB') + (BC - BA') = \\ &= AC + BC - (AC' + BC') = BC + AC - AB = a + b - c. \end{aligned}$$

Ugyancsak hasonlóak a $K_aK_bK_c$ és ABC háromszögek is, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak; a megfelelő sza-kaszok aránya $1 : 2$, mert pl. a beírt körök sugarainak ez az aránya. Ezért a sűrölt idomot határoló egyenes szakaszok összege $A_2B_1 + B_2C_1 + C_2A_1 = K_aK_b + K_bK_c + K_cK_a = (AB + BC + CA)/2 = (a + b + c)/2$, a körív darabok összege $\widehat{A_1A_2} + \widehat{B_1B_2} + \widehat{C_1C_2} = (\widehat{B'C'} + \widehat{C'A'} + \widehat{A'B'})/2 = 2\varrho\pi/2 = \varrho\pi$, tehát a teljes kerület

$$\frac{a+b+c}{2} + \frac{a+b-c}{2}\pi.$$

Dudinszky Iлона (Budapest, Budai Nagy A. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. t_s -t úgy is számíthattuk volna, mint a $K_aK_bK_c$ háromszög, a $K_aA_2B_1K_b$, $K_bB_2C_1K_c$, $K_cC_2A_1K_a$ téglalapok és az együttesen k -t kitevő $K_aA_1A_2$, $K_bB_2B_1$, $K_cC_1C_2$ körcikkek területének összegét.

Bárdy Gyula (Sopron, Kempelen F. gépip. t. II. o. t.)

2. Meggondolásunk bármely háromszögre érvényes. A háromszög derékszögű volta csak ϱ és a terület egyszerűbb kifejezését tette lehetővé.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak g. II. o. t.)