

A tetszés szerinti jegyet j -vel jelölve a $\overline{3333j}$ alak $j = 0, 1, 2, \dots, 9$ -cel tíz egymás utáni természetes számot ad meg. Négyzetüket a legkisebb $33330^2 = 1110888900 = N$ -ből kiindulva az

$$(1) \quad (n+1)^2 = n^2 + [n + (n+1)]$$

azonosság alapján egymás után könnyen képezhetjük. A szögletes zárójelbeli d hozzáadandó értéke az első lépésben $33330 + 33331 = 66661$, lépésenként $1 + 1 = 2$ -vel növekszik: $66663, 66665, \dots$, és az utolsó (a 9-ik) lépésben $33338 + 33339 = 66677$ -et tesz ki. Mindegyik érték kisebb 10^5 -nél, a 9 növelés összege kisebb 10^6 -nál, ezért a legnagyobb számra $33339^2 < N + 10^6 = 1111888900$. Eszerint valamennyi négyzet az 111 jegyhármassal kezdődik, az állításnak megfelelően. E három jegy felírását az (1) szerinti képezésben mellőzve az egymás utáni négyzetek utolsó 7 jegye rendre:

$$\begin{array}{rclclcl} 0888900, & +66661, & =0955561, & +66663 = & 1022224, & +66665 = \\ =1088889, & \text{s. í. t.} & 1155566, & & 1222225, & \\ 1288896, & & 1355569, & & 1422244, & \\ 1488921. & & & & & \end{array}$$

Valóban mind a tízben van két szomszédos egyező számjegy: az ezres és a tízezres értékű helyen álló jegy, sőt az utolsó kivételével e két jeggyel legalább egyik szomszédjuk is egyezik (az első négyzet kivételével a százasként álló jegy mindig, az elsőben pedig a százezres értékű). – Eszerint a $f = 9$ eset kivételével minden $\overline{3333j^2}$ -ben van két legalább 3-tagú, egymás utáni egyező jegyekből álló számjegy-sorozat, sőt $j = 2, 3, 4$ és 5-re mindkét sorozat legalább 4-tagú.

A $\overline{6666j^2}$ számokra az előzők alapján már kevesebb számítással célhoz érünk $M = 66660^2 = (2 \cdot 33330)^2 = 4 \cdot 1110888900 = 4443555600$ első három jegye 4-es, és ez minden $\overline{6666j^2}$ -ben fennáll, ha $j = 1, 2, \dots, 9$, mert legnagyobbjukra: $66669^2 < 66670^2 = (2 \cdot 33335)^2 = 4 \cdot 111222225 = 444888900$. – Egyenlők e számok ezres és tízezres jegyei is. Ezt M -ben közvetlenül látjuk, $j = 1, 2, \dots, 9$ -re pedig abból, hogy a $66661, \dots, 66669$ számok $n = 33339, \dots, 33331$ -gyel páronként 10^5 -t adnak összegül, márpedig a

$$(10^5 - n)^2 = (10^5 - 2n)10^5 + n^2$$

azonosság szerint n^2 és $(10^5 - n)^2$ utolsó öt jegye ugyanaz, e két szám a jobb oldal első tagja szerint csak a 10^5 és magasabb értékű helyeken álló jegyekben különbözhet. – Eszerint a 33339^2 -nek megfelelő 66661^2 kivételével minden $\overline{6666j^2}$ -ben van két legalább háromtagú, a követelményeknek eleget tevő számjegysorozat.

Még egyszerűbb a harmadik négyzetsorozat esete. Ugyanis $\overline{9999j^2} = (100000 - j')^2 = (10^5 - j')^2 = (10^5 - 2j')10^5 + j'^2$, ahol $j' = 10, 9, 8, \dots, 2, 1$. Így $j'^2 \leq 100$, ezért az első öt helyre csak a $10^5 - 2j' = 99980, 99982, \dots, 99998$ számok jegyei jönnek szóba, tehát legalább az első három jegy 9-es. A további öt helyen j'^2 áll, felírásához legfeljebb három jegy kell, tehát az ezres és a tízezres jegy 0, sőt a $j' = 10$ eset kivételével a százasként álló jegy is. $j' = 10$ esetén viszont a százezres jegy is 0, tehát e sorozat négyzetei kivétel nélkül két legalább 3 tagú egyenlő jegyekből álló jegysorozatot tartalmaznak.

Megmutatjuk, hogy a $\overline{3333j^2}$ számokban látott ismétlődések az alap jegyei közti ismétlődés következményei, és evvel párhuzamosan a $b)$ állítást is bebizonyítjuk. $L = 99990^2 = 9998000100$ -ból indulunk ki, ebben már láttuk a 9-es és 0 jegyek ismétlődésének okát. Mivel $33330 = 99900 : 3$, azért N -et az $L : 3^2 = L : 9$ osztásból is számíthatjuk. Részletes felírás nélkül látjuk, hogy a hányados első három jegye 1-es, a negyedik 0; ez után három egymás utáni lépésben a részletosztandó 80, a hányados új jegye 8, és a maradék is 8; majd a 81-es részletosztandóból N -be egy 9-et kapunk, végül két 0 zárja be N jegyeinek sorát.

Általában ($k > 2$ esetén) a k számú 9-es után egy 0-sal írt szám négyzete

$$\begin{aligned} L^* &= \underbrace{99 \dots 90^2}_k = (10^{k+1} - 10)^2 = 10^{2k+2} - 2 \cdot 10^{k+2} + 10^2 = \\ &= (10^k - 2)10^{k+2} + 10^2. \end{aligned}$$

Itt $10^k - 2$ az a k jeggyel írt szám, melynek első $k - 1$ jegye 9-es, az utolsó pedig 8-as. Erre a 10^{k+2} tényező miatt $k + 2$ számú 0 következne, de ezt a sorozatot a 10^2 tag 1-ese megszakítja, 3 jeggyel $k - 1$ tagúra rövidíti, tehát

$$L^* = \underbrace{99 \dots 9}_{k-1} 8 \underbrace{00 \dots 0}_{k-1} 100.$$

($k - 1 > 1$, ezért lehet ismétlődésről beszélni). – Mármint a k számú 3-as után egy 0-sal írt szám négyzete L^* -nak $1/9$ része. A $k = 4$ eset fenti mintájára nyilvánvaló, hogy az $L^*/9$ hányadosban $k - 1$ számú 1-es után egy 0 lép fel, ezeket $k - 1$ számú 8-as, egy 9-es és két 0 követi:

$$N^* = \underbrace{33 \dots 30^2}_k = \underbrace{11 \dots 1}_{k-1} \underbrace{088 \dots 8}_{k-1} 900.$$

Feltűnő, hogy a $\overline{3333j^2}$ számok fenti elrendezésének első oszlopában, vagyis a $j = 0, 3, 6, 9$ értékekre az ezres és tízezres helyen ugyanaz a jegy, a 8-as ismétlődik. Ez az

$$(n+3)^2 = n^2 + [3n + 3(n+3)]$$

azonossággal magyarázható. Ugyanis $3n + 3(n+3) = d'$ értéke rendre $99\,990 + 99\,999 = 199\,989 = 2 \cdot 10^5 - 11$, ill. $2 \cdot 10^5 + 7$ és $2 \cdot 10^5 + 25$, vagyis a növelés kerek százezrestől csak „kicsit” tér el. Így a megfelelő négyzetek között csak a 10^5 és esetleg a 10^6 , másrészt az 1, 10 és esetleg a 10^2 értékű jegyekben van különbség, de a 10^3 és 10^4 értékű jegyekben nincs, ugyanis az N utolsó három jegyével írt 900 egyrészt nagyobb a d' első értékében szereplő 11-es kivonandónál, másrészt a három d' érték $6 \cdot 10^5 + 21$ összegében szereplő 21-gyel növelve sem éri el 10^8 -t. Mivel N ezres jegye éppen 1-gyel kisebb a százasanál, azért a -11 tag hozzáadásával $j = 3$ esetén a százás is egyezik az ezressel, ugyanígy $j = 6$ -nál is, mert $-11 + 7 < 0$; de már $j = 9$ -nél a százás jegy ismét nagyobb az ezresnél, mert $-11 + 7 + 25 > 0$. Ezért van, hogy $j = 9$ esetén a második jegysorozat csak 2 tagú.

A $33\,331^2$ -ben fellépő 555 jegysorozatbeli ismétlődést az magyarázza, hogy N ezres jegye 1-gyel kisebb a százasanál, és ezt a hiányt a $d = 66\,661$ százasanak hozzáadásakor fellépő 1 maradék ($9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^2 = 15 \cdot 10^2 = 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2$) kiegyenlíti és ez a tízezresben is megismétlődik. Hasonlóan $33\,332^2$ azért örökli a 10^2 , 10^3 és 10^4 értékű jegyek megegyezését $33\,331^2$ -től, mert ebben a százás helyen álló 5 is 1-gyel kisebb a tízes helyen álló 6-nál, és ezt a hiányt $d = 66\,663$ hozzáadásakor a tízes oszlopból fellépő 1 maradék kiegyenlíti.

Ezek alapján megérthető a fenti elrendezés 2-ik és 3-ik oszlopában az 5-ös, ill. 2-es jegyek ismétlődése. Ugyanis a $j = 1, 4, 7$ -hez és $j = 2, 5, 8$ -hoz tartozó négyzeteken végigmenve d' értékében $2 \cdot 10^5$ után második tagként hozzá képest ismét kicsi tagok lépnek fel: -5 és $+13$, ill. $+1$ és $+19$. Ezért marad változatlanul a 10^4 , 10^3 , 10^2 helyen álló 555, ill. 222 jegyhármas, továbbá mert $61 > 5$ és $61 - 5 + 13 < 10^2$, ill. $24 + 1 + 19 < 10^2$, ahol 61 és 24 a $33\,331^2$ és $33\,332^2$ utolsó két jegyével írt szám.

Mármost a 8-as, 5-ös, ill. 2-es jegyek sorozatai N^* -ból a $\overline{33 \dots 3j^2}$, $1 \leq j \leq 9$ számokra is átöröklődnek, mert az alaphoz a 3-asok, az első két d -ben a 6-osok és N^* -ban a 8-asok száma ugyanannyival változik: 4-ről k -ra, ill. 3-ról $k - 1$ -re, és e jegysorozatok is ugyanazon értékű helyen végződnek, mint $k = 4$ esetén; továbbá a d' -beli $2 \cdot 10^{k+1}$ -re változik, ugyanis pl. a legkisebb tagban

$$\underbrace{99 \dots 90}_k + \underbrace{99 \dots 99}_{k+1} = (10^{k+1} - 10) + (10^{k+1} - 1) = 2 \cdot 10^{k+1} - 11.$$

E jegysorozatok jegyeinek száma a 3-nak megfelelő $k - 1$, csupán a $33 \dots 39^2$ -ben a 2-nek megfelelő $k - 2$.

A négyzetek elején álló 1-esek $k - 1$ tagú sorozata pedig azért öröklődik át N^* -ból, mert a kilenc d mindegyike kisebb 10^{k+1} -nél, összegük kisebb 10^{k+2} -nél, és így N^* közbülső 0 jegye helyére is legfeljebb 1-es léphet.

Ezek szerint $33 \dots 39^2$ -ben egy k -tagú és egy $k - 2$ -tagú egymás utáni egyenlő jegyekből álló számjegysorozat lép fel, a többi kilenc négyzetben pedig mindkét jegysorozat tagjainak száma legalább $k - 1$. $33 \dots 30^2$ -ben a második jegysorozat 1-gyel magasabb értékű helyen kezdődik és végződik, mint a többi nyolcban.

Összeállítva: Gyüre Zsuzsanna (Szeged, Tömörkény I. lg. I. o. t.),

Bresztyenszky Júlia (Budapest, Kossuth L. gépip. t. II. o. t.)

és Lipcsey Zsolt (Budapest, Petőfi S. g. II. o. t.) dolgozataiból.