

Előzetes megjegyzés. Kézenfekvő az a bizonyítás, melyben mindhárom kifejezést polinom alakra hozzuk, és rámutatunk, hogy így tagról tagra megegyeznek. Alább ennél rövidebb megoldásokat mutatunk be.

I. megoldás. Az első és a második kifejezésből úgy kapjuk a következőt, és a harmadikból is az elsőt, hogy minden a helyébe b -t, minden b , ill. c helyébe c -t, ill. a -t írunk, röviden mondva: a, b, c -t *ciklikusan felcseréljük*. Ebből következik, hogy a három kifejezés akkor és csak akkor azonos, ha bármelyikük polinom alakja az említett cserékkel önmagába megy át. Így már elég egyiküket polinommá alakítani: Az elsőből

$$a(a-c)^2 + b(b-c)^2 - (a-c)(b-c)(a+b-c) = (a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a) - (ab^2 + bc^2 + ca^2) + 3abc.$$

Itt a jobb oldal a, b, c ciklikus felcserélésével önmagába megy át, tehát a kifejezések azonosak.

Soós András (Balatonfűzfő, Ált. isk. VIII. o. t.)

Megjegyzés. A kifejezéseknek a ciklikus felcseréléssel egymásba való átmenetele magában nem elég az azonossághoz. Ez a tulajdonságuk pl. az a, b, c „kifejezéseknek” is megvan, de nem azonosak.

II. megoldás. Az előzők után elég az első K kifejezést olyan három szorzat összegévé alakítani, melyek ciklikus felcseréléssel egymásba mennek át. Evégett a harmadik szorzat háromtagújával beszorzunk, – így K öt szorzat összege –, majd az 1. és 3., valamint 2. és 4. szorzat közös tényezőit kiemeljük:

$$\begin{aligned} & a(a-c)^2 + b(b-c)^2 - (a-c)(b-c)(a+b-c) = \\ &= a(a-c)^2 + b(b-c)^2 - a(a-c)(b-c) - b(b-c)(a-c) + c(a-c)(b-c) = \\ &= a(a-c)(a-c-b+c) + b(b-c)(b-c-a+c) + c(a-c)(b-c) = \\ &= a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

(Az utolsó lépésben a 3. szorzat két kéttagú tényezőjét (-1) -gyel szoroztuk.) Az utolsó alaknak megvan a kívánt tulajdonsága, tehát a bizonyítást befejeztük.

Bana Sándor (Szeged, Radnóti M. g. I. o. t.)

III. megoldás. Az I. megoldás észrevétele alapján elég megmutatni, hogy a három kifejezés közül bármelyik kettő különbsége azonosan 0. Tekintsük az első kettő különbségét, pl. a c változó $f(c)$ polinomjának (a és b pedig legyen egyelőre állandó).

$$\begin{aligned} f(c) &= a(a-c)^2 + b(b-c)^2 - (a-c)(b-c)(a+b-c) - b(b-a)^2 - \\ &\quad - c(c-a)^2 + (b-a)(c-a)(b+c-a). \end{aligned}$$

$f(c)$ legfeljebb 3-adszoros, így 0-val azonos, ha $3+1=4$ különböző helyen 0-val egyenlő. Legyenek e helyek $c=0$, $c=a$, $c=b$, $c=a+b$, ezek általában különbözők. Mármost

$$\begin{aligned} f(0) &= [(a^3 + b^3) - ab(a+b)] - [b(b-a)^2 + a(b-a)^2] = (a+b)(a^2 - ab + b^2 - ab) - (b+a)(b-a)^2 = (a+b)[(b-a)^2 - (b-a)^2] = 0; \\ f(a) &= 0 + b(b-a)^2 - 0 - b(b-a)^2 - 0 + 0 = 0; \\ f(b) &= a(a-b)^2 + 0 - 0 - b(b-a)^2 - b(b-a)^2 + (b-a)^2(2b-a) = \\ &= (b-a)^2(a-b-b+2b-a) = 0; \\ f(a+b) &= a(-b)^2 + b(-a)^2 - 0 - b(b-a)^2 - (a+b)b^2 + 2(b-a)b^2 = \\ &= b^2[a - (a+b) + 2(b-a)] + b[a^2 - (b-a)^2] = \\ &= b^2(b-2a) + b(2a-b)b = 0. \end{aligned}$$

A vizsgált különbség hasonlóan akkor is 0-val azonosnak adódik, ha az a , vagy b változik és a további betűk állandók.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Rácz László (Budapest, Kossuth L. gép. t. II. o. t.)