

I. megoldás. Nyilvánvaló, hogy az N^2 négyzetszám N alapja 3-jegyű, tehát $N = A \cdot 10^2 + B \cdot 10 + C$ alakban írható, ahol A, B, C az N számjegyei. Így négyzete

$$N^2 = A^2 \cdot 10^4 + 2AB \cdot 10^3 + (2AC + B^2)10^2 + 2BC \cdot 10 + C^2.$$

N^2 első 2-es jegye miatt $A^2 < 3$, tehát $A = 1$. A negyedik, 5-ös jegy helyi értéke 10, erre csak a $2BC \cdot 10$ és a C^2 tagok vannak befolyással. Közülük az első 20-szal osztható, ezért C^2 tízesének páratlannak kell lennie. A számjegyek négyzetei között csak $C = 4$ és $C = 6$ ilyen. Mindkettőben az egyes jegy 6, tehát N^2 utolsó jegye 6.

$C = 4$ esetén az utolsó két tag értéke $80B + 16$ és ez $100k + 56$ alakú, ahol k egész. Innen $80B = 100k + 40$, egyszerűsítve $8B = 10k + 4$, és mivel a 8-as szám szorzótábláján csak $3 \cdot 8$ és $8 \cdot 8$ végződik 4-re, azért $B = 3$, vagy 8. Így $N = 134$, vagy 184. Ezek négyzetében azonban az első jegy 1, ill. 3, tehát nem felelnek meg.

$C = 6$ esetén hasonlóan $120B + 36 = 100k + 56$ -ból $12B = 10k + 2$, tehát $B = 1$, vagy 6, ezért $N = 116$ vagy 166. Az első nem felel meg, mert kisebb a fenti 134-nél. 166 megfelel: $166^2 = 27556$, ez a keresett szám.

Gáti Imre (Pécs, Zipernovszky K. gépip. t. II. o. t.)

Megjegyzés. Majdnem minden megoldás efféle úton jutott el az eredményhez. Az alábbi megoldás néhány eleme csak Pázmándi László (Budapest, József A. g. II. o. t.) megoldásában olvasható.

II. megoldás. Az adott jegyek alapján a keresett N^2 négyzetszámra $20\,050 \leq N^2 < 30\,000$, tehát pozitív négyzetgyökére $142 \leq N \leq 173$.

A negyedik jegy helyi értéke 10, ez tehát beletartozik N^2 „kétjegyű végződésébe”, vagyis az utolsó két jegyével írt számba, amely az alábbiak szerint egyszerű kapcsolatban áll az N alap kétjegyű végződésével. A továbbiakban az $N = 5k$ alakú számokat figyelmen kívül hagyjuk, mert ezekkel N^2 végződése 00, vagy 25, tehát tízes jegye nem 5-ös.

Az a és b egész számok négyzetének kétjegyű végződése akkor és csak akkor egyenlő, ha az $a^2 - b^2$ különbség 00-ra végződik, tehát $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 100k = 2^2 \cdot 5^2 k$. Így az $a - b$ és $a + b$ tényezők mindegyike páros, mert két egész szám összege és különbsége egyenlő párosságú – azaz vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan – most pedig egyiküknek párosnak kell lennie. A szorzat két 5-ös tényezője viszont csak $a - b$ és $a + b$ egyikéből adódhat, mert az ellenkező feltevés, hogy ti. mindkét tényező 5-tel is osztható, $a - b = 10m$, $a + b = 10n$ -re és folytatólag $a = 5(m + n)$ -re, a kizárt esetre vezet. Eszerint vagy $a - b$, vagy $a + b$ osztható 50-nel. Mármost $a - b = 50p$ -ből $a = b + 50p$, vagyis a kétjegyű négyzetvégzódések az egész számokon 50-esével előrehaladva ismétlődnek, $a + b = 50r$ -ből pedig $(a + b)/2 = 25r$, vagyis az olyan számok kétjegyű négyzetvégzódései is egyeznek, melyek 25 valamely többszöröse „tükrösek”, vagyis ha $a = 25r + s$, akkor $b = 25r - s$.

Eszerint pl. az 1-től 24-ig terjedő, 5-tel nem osztható számok négyzetéből minden a 00 és 25-től különböző kétjegyű végzódést megkaphatunk. Köztük csak egy olyan van, melynek tízes jegye 5, ez 16^2 -ből az „56” négyzetvégzódés. Ezt a négyzetvégzódést adja még minden $16 + 50 = 66$ -ra, $50 - 16 = 34$ -re, és $100 - 16 = 84$ -re végződő alap.

Eszerint N fenti korlátai, 142 és 173 között csak $N = 166$ felelhet meg, és mivel további adatunk (korlátozásunk) nincs rá, meg is kell felelnie.