

I. Tekintsük a $3/5$ törtet és próbálkozzunk egyik összeadandóként 2 reciprokával. (1 reciproka ugyanis még nagyobb $3/5$ -nél.) Ha a $3/5 - 1/2$ különbség valamely természetes szám reciproka, akkor máris megoldást kaptunk. Valóban

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}, \text{ tehát } \frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}.$$

3 reciprokával nem kapunk felbontást, mert $3/5 - 1/3 = 4/15$ reciproka nem természetes szám. 4 és nagyobb egész szám reciprokával felesleges tovább próbálkoznunk, mert $1/4$ kisebb $3/5$ felénél, $3/10$ -nél, tehát a másik összeadandónak nagyobblnak kellene lennie $1/4$ -nél, a természetes számnak pedig kisebbnek 4-nél. Így több felbontás nincs.

Hasonlóan

$$\frac{3}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}.$$

Itt az első felbontás tagjainak reciprokai: 4 és 20 kétszer akkorák, mint $3/5$ esetében a 2 és 10 számok. Ebből sejtjük, hogy minden $3/5n$ alakú tört, vagyis a $3/5$ -nél n -szer kisebb szám – ahol n tetszőeszerinti természetes szám – felírható a 2 és 10-nél n -szer nagyobb $2n$ és $10n$ természetes számok reciprokának összege gyanánt. Továbbá $3/10$ második felbontásának mintájára, ha n páros, $n = 2k$ (k természetes szám) vagyis $5n = 10k$, akkor $3/5n = 3/10k$, az $5k$ és $10k$ számok reciproka összege gyanánt is felírható. Valóban

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{10n} = \frac{6}{10n} = \frac{3}{5n} \quad \text{és} \quad \frac{1}{5k} + \frac{1}{10k} = \frac{3}{10k} = \frac{3}{5 \cdot 2k}.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Tovább folytatva hasonlóan kapjuk: $3/15 = 1/5 = 1/6 + 1/30 = 1/10 + 1/10$, a második felbontás két tagja egyenlő. Általában $3/5n$ akkor egyenlő x reciprokának 2-szeresével, vagyis

$$\frac{3}{5n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \quad \text{ha} \quad x = \frac{10n}{3},$$

ez pedig akkor, és csak akkor egész, ha n többszöröse 3-nak.

$n = 3k$ esetében még egy összegfelbontást adhatunk $3/5n$ -re. Ilyenkor a $3/15$, $3/30$, $3/45$, ... számok az $1/5$, $1/10$, $1/15$, ... alakban írhatók, és ismeretes, hogy az

$$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{k}{k(k+1)}, \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{k}{k(k+1)}$$

azonosság alapján a 2, 3, 4, ... számok reciproka felírható két nagyobb; különböző egész szám reciprokának összege gyanánt.

II. $3/5$ nem írható a kívánt alakú különbséggént, mert a kisebbítendő csak az $5/3$ -nál kisebb 1 reciproka lehetne, márpedig $1/1 - 3/5 = 2/5$, és ennek reciproka nem egész. Megmutatjuk viszont, hogy minden további adott szám előállítható a kívánt alakban. Erre az alábbiak szerint jöhetünk rá. $3/10$ esetében a kisebbítendő reciprokának kisebbnek kell lennie $10/3$ -nál, így csak 1, 2, 3 jöhet szóba. Mármost

$$\frac{1}{1} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}, \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30},$$

$$\text{tehát} \quad \frac{3}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{30}.$$

Hasonlóan $3/15 = 1/5$ esetében

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}, \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}, \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20},$$

$$\text{tehát} \quad \frac{3}{15} = \frac{1}{4} - \frac{1}{20};$$

$3/20$ esetében

$$1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}, \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{20} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}, \quad \frac{1}{3} - \frac{3}{20} = \frac{11}{60},$$

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{8}{80} = \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{5} - \frac{3}{20} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}, \quad \frac{1}{6} - \frac{3}{20} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60},$$

$$\text{tehát} \quad \frac{3}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{1}{6} - \frac{1}{60}.$$

Észrevesszük, hogy az

$$\frac{1}{x} - \frac{3}{10}, \quad \frac{1}{x} - \frac{3}{15} = \frac{1}{x} - \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{x} - \frac{3}{20}$$

különbségben, ha közös nevezőnek mindig a két nevező szorzatát vesszük, és x helyére sorra az 1, 2, 3, ... számokat helyettesítjük addig, amíg a különbség még pozitív, akkor (az esetleges egyszerűsítés előtti) számlálók szabályosan

kisebbednek: 7, 4, 1, ill. 4, 3, 2, 1, ill. 17, 14, 11, 8, 5, 2. Az első két sorozat végén fellépett az 1-es számláló, a harmadikban pedig egyszerűsíthettünk 8, 5, ill. 2-vel, ezen múlt a felbontás lehetősége.

Általában az

$$(1) \quad \frac{1}{x} - \frac{3}{5n} = \frac{5n-3}{5nx}$$

alak számlálójának csökkenése x növekedésével 3 egységnyi lépésekben történik, így minden esetben eljutunk vagy a 3-as, vagy a 2-es, vagy az 1-es számlálóra.

Vegyük sorra e három lehetőséget. $5n-3x=3$ akkor adódik, ha van olyan x egész szám, amelyre $5n=3x+3=3(x+1)$, vagyis ha n osztható 3-mal, $n=3k$ alakú, ahol $k=1, 2, 3, \dots$. Ekkor (1) jobb oldala 3-mal egyszerűsíthető:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{3}{5nx} &= \frac{1}{5kx}, \quad \text{másképp} \quad x = \frac{5n-3}{3} = 5k-1, \quad \text{és így} \\ \frac{3}{5n} &= \frac{1}{5k} = \frac{1}{5k-1} - \frac{1}{5k(5k-1)}. \end{aligned}$$

$5n-3x=1$ adódik, ha van olyan x egész szám, amelyre

$$x = \frac{5n-1}{3} = \frac{6n-(n+1)}{3} = 2n - \frac{n+1}{3},$$

tehát ha $n+1$ osztható 3-mal: $n+1=3k$, vagyis $n=3k-1$, és ekkor $x=2n-k=5k-2$. Ekkor (1)-ből egyszerűsítés nélkül:

$$(3) \quad \frac{3}{5n} = \frac{3}{5(3k-1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{5nx} = \frac{1}{5k-2} - \frac{1}{5(3k-1)(5k-2)}$$

Végül $5n-3x=2$ adódik, ha

$$x = \frac{5n-2}{3} = n + \frac{2n-2}{3} = n + 2 \cdot \frac{n-1}{3},$$

tehát ha $n-1$ osztható 3-mal, $n-1=3k$, vagyis $n=3k+1$, és ekkor $x=n+2k=5k+1$. Ekkor (1) jobb oldala

$$(4) \quad \frac{2}{5nx} = \frac{2}{5(3k+1)(5k+1)}.$$

Ez páratlan k esetén egyszerűsíthető 2-vel, mert ilyenkor a nevező zárójeles tényezői párosak, ilyen volt 3/20 esete, mert ott $5n=20$, $n=4=3 \cdot 1+1$. Páros k esetén (4) nem egyszerűsíthető. Ekkor viszont a csökkenő számlálók sorozatának utolsó előtti tagja 5, ez a nevezőnek is tényezője, tehát egyszerűsítve 1-es számlálót kapunk. $n=3k+1$ -gyel és $5n-3x=5$ -tel

$$x = \frac{5n-5}{3} = \frac{5(n-1)}{3} = 5k, \text{ és (1) jobb oldala } \frac{5}{5nx} = \frac{1}{nx} = \frac{1}{5k(3k+1)}.$$

Ezek szerint a $3k+1$ alakú n számok esetére a

$$(5) \quad \frac{3}{5n} = \frac{3}{5(3k+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{nx} = \frac{1}{5k} - \frac{1}{5k(3k+1)}$$

felbontás mindig lehetséges, továbbá páratlan k , vagyis $k=2j+1$, és $n=3k+1=6j+4=2(3j+2)$ esetére $x=5k+1=10j+6=2(5j+3)$ -mal és (4)-ből $2/5nx=1/[5(3j+2)(10j+6)]$ -tal a következő felbontás is érvényes:

$$(5') \quad \frac{3}{5n} = \frac{3}{10(3j+2)} = \frac{1}{2(5j+3)} - \frac{1}{10(3j+2)(5j+3)}.$$

Mivel minden n egész szám vagy a $3k$, vagy a $3k-1$, vagy a $3k+1$ alakban írható, azért 3/10-től kezdve (2), (3), ill. (5) szerint valóban valamennyi adott szám írható két természetes szám reciprokának különbségeként. Az (5) felbontás azért nem érvényes a 3/5 törtre, azaz $n=1$ -re, mert akkor $k=0$, és a jobb oldálnak nincs értelme.

Pázmándi László (Budapest, József A. g. II. o. t.)