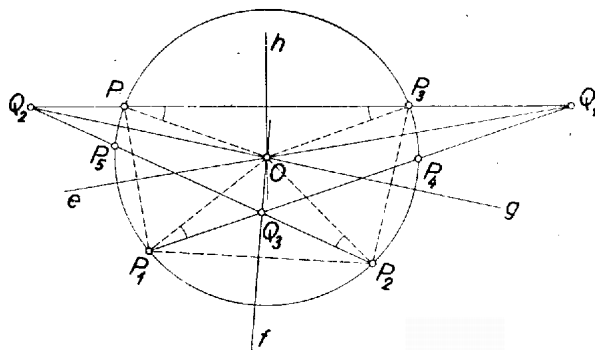


I. megoldás. Bizonyításunkat az 1. ábrán látható helyzethez kapcsoljuk; e , f , g és P más kölcsönös helyzetében az állítás hasonlóan bizonyítható.



1. ábra

Q_1P_1 , és Q_2P_2 metszéspontját Q_3 -mal jelölve elég belátnunk, hogy a $P_1P_2Q_3\Delta$ egyenlő szárú: $Q_3P_1 = Q_3P_2$; így ugyanis Q_3 a P_1P_2 szakasz felező merőlegesén van, ami pedig a tükrözésnél fogva az f egyenes. – Már most a tükrözés folytán $OP = OP_1 = OP_2 = OP_3$, tehát az $OPP_3\Delta$ egyenlő szárú, és h tengelye átmegy O -n. Így az

$$OP_1Q_3, OP_1Q_1, OPQ_1, OPP_3, OP_3P, OP_3Q_2, OP_2Q_2, OP_2Q_3$$

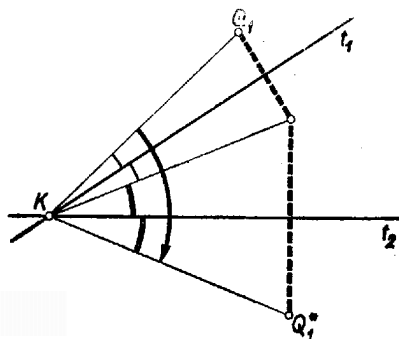
szögek sorozatában (a 2-iktól kezdve) mindegyik egyenlő az előtte állóval, mert váltakozva vagy csupán ugyanazon szögnek más jelöléssel való megadásáról van szó, vagy a szomszédos szögek egymásnak rendre e , h , g -re tükrörképei. Innen $OP_1Q_3 \sphericalangle = OP_2Q_3 \sphericalangle$, az OP_1P_2 egyenlő szárú háromszögből $OP_1P_2 \sphericalangle = OP_2P_1 \sphericalangle$, ezekből kivonással $Q_3P_1P_2 \sphericalangle = Q_3P_2P_1 \sphericalangle$, tehát a $Q_3P_1P_2\Delta$ valóban egyenlő szárú.

Kádár Levente (Mezőkövesd, I. László g. II. o. t.)

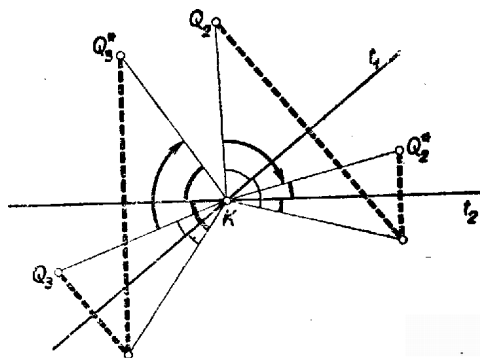
Megjegyzés. Lényegében ugyanezt a bizonyítást mondjuk el más szavakkal, ha arra hivatkozunk, hogy $PP_1P_2P_3$ húrnégyszög (hurkolt is lehet), és a PP_1Q_1 , $P_2P_3Q_2$ háromszögek egyenlő szárúak.

Keviczky László (Ráckeve, Ady E. g. II. o. t.)

II. megoldás. Folytassuk a tükrözést, és legyen P_3 képe e -re P_4 , P_4 képe f -re P_5 , és P_5 képe g -re P_6 . Ekkor P_6 egybeesik P -vel. Ismeretes ugyanis, hogy két metsző tengelyen való egymás utáni tükrözés eredményét az a forgatás is megadja, melynek középpontja a tengelyek közös pontja, szöge pedig 2-szer akkora és olyan forgási irányú, mint az 1. tengelyt a 2-ba vivő forgás (lásd a 2–3. ábrán a Q pontok átvitelét Q^* -ba; állításunk akkor is érvényes, ha t_1 -et ellentétes irányban, tompa szöggel forgatjuk t_2 -be).

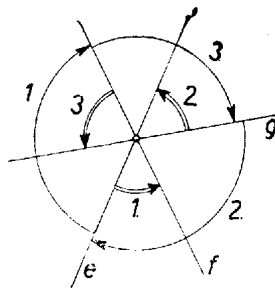


2. ábra



3. ábra

Eszerint a 6 tükrözés eredménye helyettesíthető 3 forgatással az O körül és a forgatás szöge rendre az e -t f -be, g -t e -be és f -et g -be vivő forgatás 2-szerese. E 3 forgatás összege egyetlen forgatás O körül. A 3-ik forgatást 2-iknek véve, a 3 forgatás összege annyi, amennyi e -t e -be viszi, ezért értéke 180° , vagy 360° (4. ábra), így kétszerese 360° , vagy 720° , tehát valóban $P_6 = P$.



4. ábra

Megmutatjuk, hogy a kérdéses Q_3 pont a P_1P_4 és P_2P_5 egyenesek közös pontja. Ugyanis P_4 és P_3 tükrösek e -re, ezért P_3 -on átmenő Q_1P -nek e -re vett Q_1P_1 tükörképe átmegy P_4 en, másrészt Q_1P_1 a Q_3 egyik meghatározója, tehát P_1P_4 átmegy Q_3 -on. Ugyanígy P_5 és P tükrösek g -re, ezért a P -n átmenő Q_2P_3 -nak g -re vett Q_2P_2 tükörképe átmegy P_5 -ön, másrészt Q_3 -on, tehát P_2P_5 átmegy Q_3 -on. És mivel P_1 és P_2 , valamint P_4 és P_5 pontok az f -re tükrösek, ezért ez áll a P_1P_4 és P_2P_5 egyenesekre is, így pedig közös Q_3 pontjuk f -en van.

Kiss Gábor (Debrecen, Kossuth L. gyak g. II. o. t.).

Megjegyzés. Biztosra vettük, hogy Q_1P_1 és Q_2P_2 nem párhuzamosak, a Q_3 pont létezik. Tekintsük most a $Q_1Q_3Q_2$ szöveget. e, f, g felezi a $Q_1Q_3Q_2\triangle$ szögeit. Így az $OQ_1Q_2\triangle$ szögeit rendre $\omega, \varphi_1, \varphi_2$ -vel jelölve $Q_1Q_3Q_2\triangle = 180^\circ - 2\varphi_1 - 2\varphi_2 = 2\omega - 180^\circ$. Eszerint $\omega = 90^\circ$, más szóval $e \perp g$ esetén a $Q_1Q_2Q_3\triangle$ nem jön létre, Q_1P_1 és Q_2P_2 párhuzamosak f -fel. – Akkor is elfajult eset adódik, ha a PP_3 egyenes átmegy O -n, továbbá, ha P_1 éppen f -en adódik. Ilyenkor nincs mit bizonyítani, mert $Q_1 \equiv Q_2 \equiv O$, ill. $P_2 \equiv P_1$, és így Q_3 az O -ba, ill. P_1 -be esik, ami valóban f -en van. Ha pedig P az e -n van, továbbá, ha P_3 éppen g -n adódik, akkor egyenesek egyike határozatlan.