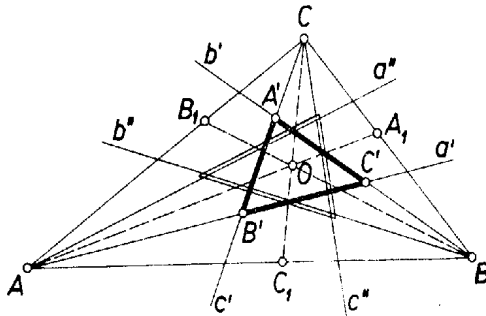


Legyen az A, B, C csúcsból kiinduló első harmadoló rendre a', b', c' , a második harmadoló rendre a'', b'', c'' , továbbá az a', b' félegyenes-pár metszéspontja C' , a b', c' , ill. c', a' pár metszéspontja A' , ill. B' . Meg kell keresnünk az $ABC = H$ és $A'B'C' = H'$ háromszögek szögei közti összefüggéseket. Ehhez tisztáznunk kell H és H' egymáshoz viszonyított helyzetét. Megmutatjuk, hogy H' a H belsejében van, éspedig mindegyik első harmadoló egyenesének azon az oldalán, mint a szög csúcsából kiinduló második harmadoló (mint félegyenes); pl. H' az a' -nek azon az oldalán van, mint a'' . Legyen az A, B, C -ből kiinduló belső szögfelezőknek a szemben fekvő oldalon levő metszéspontja A_1, B_1, C_1 , és a szögfelezők közös pontja O .



Ekkor a' a BAA_1 szögtartományban, b' a CBB_1 szögtartományban van, így C' ezek közös részében, az A_1OB háromszögben van, amely az ABC háromszögnek része. Hasonlóan A' a B_1OC , B' pedig a C_1OA háromszög belsejében van. Ebből azt is látjuk, hogy pl. a' -n és b' -n a pontok sorrendje A, B', C' , ill. B, C', A' , tehát C' valóban szétválasztja B és A' -t.

Eszerint H' -nek a C' -nél levő γ' szöge az ABC' háromszög külső szöge, tehát a szokásos jelölésekkel $\gamma' = (\alpha + 2\beta)/3$. Hasonlóan az A' -nél, B' -nél levő szög $\alpha' = (\beta + 2\gamma)/3$, ill. $\beta' = (\gamma + 2\alpha)/3$. – Feltehetjük, hogy H' adott szögei α' és β' , így α, β, γ -ra a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \beta + 2\gamma = 3\alpha', \\ (2) \quad & \gamma + 2\alpha = 3\beta, \\ (3) \quad & \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ. \end{aligned}$$

(2)-ből $\gamma = 3\beta' - 2\alpha$, ezzel (1)-ből $\beta = 3\alpha' - 6\beta' + 4\alpha$, és mindkettővel (3)-ból:

$$(4) \quad \alpha = 60^\circ - \alpha' + \beta', \quad \text{tehát} \quad \beta = 240^\circ - \alpha' - 2\beta', \quad \gamma = -120^\circ + 2\alpha + \beta'.$$

E képletek mindegyikében α' és β' együtthatói különbözők, így az adott számértékeket α' és β' számára mindkét sorrendben figyelembe kell vennünk.

$$(5) \quad \alpha' = 45^\circ \text{ és } \beta' = 55^\circ \quad \text{mellett:} \quad \alpha = 70^\circ, \quad \beta = 85^\circ, \quad \gamma = 25^\circ,$$

$$(6) \quad \alpha' = 55^\circ \text{ és } \beta' = 45^\circ \quad \text{mellett:} \quad \alpha = 50^\circ, \quad \beta = 95^\circ, \quad \gamma = 35^\circ,$$

Így H -ra két megoldást kaptunk, ezekben H' körüljárása egymással ellentétes.

Az a'', b'', c'' harmadolók által alkotott H'' háromszög szögeire a fentiekhez hasonlóan

$$\alpha'' = (2\beta + \gamma)/3, \quad \beta'' = (2\gamma + \alpha)/3, \quad \gamma'' = (2\alpha + \beta)/3,$$

ennélfogva (4) alapján mindegyiket α' és β' -vel kifejezve

$$\begin{aligned} \alpha'' &= [(480^\circ - 2\alpha' - 4\beta') - 120^\circ + 2\alpha' + \beta']/3 = 120^\circ - \beta', \\ \beta'' &= \alpha' + \beta' - 60^\circ, \quad \gamma'' = 120^\circ - \alpha'. \end{aligned}$$

Ezek szerint α' és β' sorrendjét felcserélve α'' és γ'' felcserélődnek, β'' viszont változatlan marad. Más szóval H'' szögei a H -ra kapott két megoldásban egyenlők, körüljárásuk azonban ellentétes. A szögek értéke, nagyság szerint rendezve: $40^\circ, 65^\circ, 75^\circ$.

Deák István (Budapest, Vörösmarty M. g. I. o. t.)