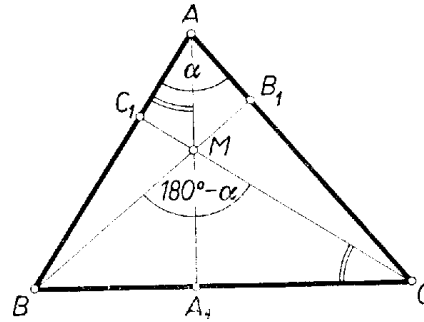


I. megoldás: Elég az állítást a szokásos jelölésekkel pl. az AM távolságra megmutatni, vagyis hogy $AM = a \operatorname{ctg} \alpha$, ha $\alpha \leq 90^\circ$, és $AM = a \operatorname{ctg} (180^\circ - \alpha)$, ha $\alpha > 90^\circ$.

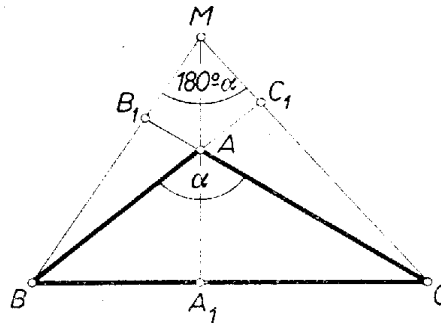
Ha $\alpha < 90^\circ$, akkor β és γ -nak legalább az egyike szintén hegyesszög, legyen ez β . Ekkor C -nek az AB egyenesre való C_1 vetülete – ami egyszersmind M vetülete is – A és B közé esik, és $\operatorname{ctg} \alpha = AC_1/CC_1$ (1. ábra).



1. ábra

Az MAC_1 és BCC_1 derékszögű háromszögek hasonlóak, mert A , ill. C -nél levő (hegyes) szögük szárai páronként merőlegesek. Így $MA : AC_1 = BC : CC_1$, ebből pedig

$$MA = BC \frac{AC_1}{CC_1} = BC \operatorname{ctg} \alpha.$$



2. ábra

Ha pedig $\alpha > 90^\circ$ (2. ábra), akkor – mint a 637. gyakorlat¹ megoldásában láttuk – az MBC háromszög hegyesszögű, és magasságpontja A , és így az előző eset szerint $AM = BC \operatorname{ctg} \alpha'$, ahol α' a BMC szöget jelöli. Ez pedig egyenlő a külső szögével, $180^\circ - \alpha$ -val, ugyanis az MB_1AC_1 négyszögben szemben fekszik a csúcshöszögével, és összegükre 180° marad, mert a szemben fekvő B_1 és C_1 -nél levő szögek összege szerkesztésnél fogva két derékszög.

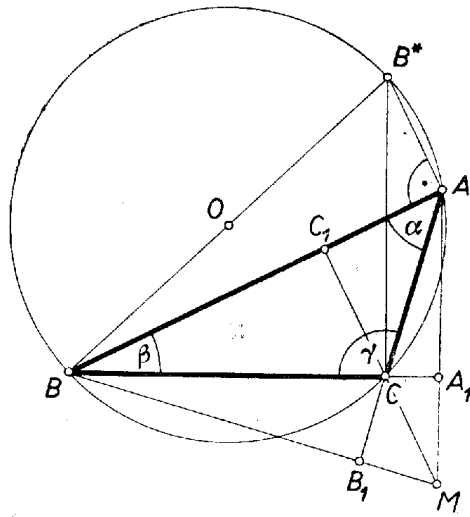
Végül $\alpha = 90^\circ$ esetén egyrészt M az A -ba esik, így $MA = 0$, másrészt $\operatorname{ctg} \alpha = 0$, tehát az állítás ekkor is igaz.

Majeros László (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

A dolgozatoknak kb. fele két szög függvényeit és a szinusz-tételt használta fel – esetleg burkoltan – vagyis a szükségesnél erősebb eszközökkel dolgozott. Közülük több ún. második megoldás. Márpedig egyszerűbb megoldás után egy bonyolultabb második megoldásnak nincs értéke; az ilyenre többnyire nem adunk külön pontot. A következő megoldás a trigonometriából ismét csak a 90° -nál nem nagyobb szög kotangensének meghatározását használja fel.

II. megoldás: Megmutatjuk az állítás helyességét M -nek egy hegyesszögű és egy tompaszögű csúctól való távolságára. Feltehetjük, hogy β hegyesszög. Tekintsük a háromszög körülírt körében a B -ből kiinduló átmérő másik végpontját, B^* -ot. Thalész tétele szerint $B^*A \perp BA$, tehát $B^*A \parallel CM$; hasonlóan $B^*C \parallel AM$, így az $AMCB^*$ négyszög paralelogramma, $AM = B^*C$, és $CM = B^*A$ (3. ábra).

¹Lásd K. M. L. 22 (1961) 110. o.



3. ábra

Hegyesszög esetén, mint ábránkon α , a B^* ugyanazon a BC íven van, mint A , ezért $BB^*C \sphericalangle = \alpha$, és így a BB^*C derékszögű háromszögből $AM = B^*C = BC \operatorname{ctg} \alpha$.

Tompaszög esetén pedig, mint ábránkon γ , a B^* a C -t nem tartalmazó AB íven van, ezért $BB^*A \sphericalangle = 180^\circ - \gamma$ (hegyesszög), és így a BB^*A derékszögű háromszögből $CM = B^*A = BA \operatorname{ctg} (180^\circ - \gamma)$.