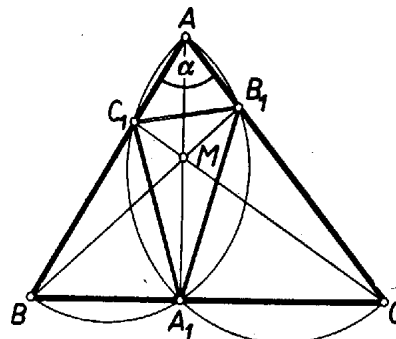


Állapítsuk meg általában, hogy milyen összefüggés áll fenn egy tetszőleges ABC háromszög és az ennek $A_1B_1C_1$ talpponti háromszöge szögei között. Ebben felhasználjuk, hogy bármelyik oldal két végpontjából kiinduló magasságok talppontjai rajta vannak az illető oldal mint átmérő fölé írt Thalész-körön, így e négy pont húrnégyszöget határoz meg.

Hegyesszögű háromszög esetén (1. ábra) mindhárom talppont a megfelelő oldal belsejében van, így pl. az AA_1 magasság a B_1, C_1 talppontokat szétválasztja, és ezért a $B_1A_1C_1$ szög a B_1A_1A és AA_1C_1 szögek összege.



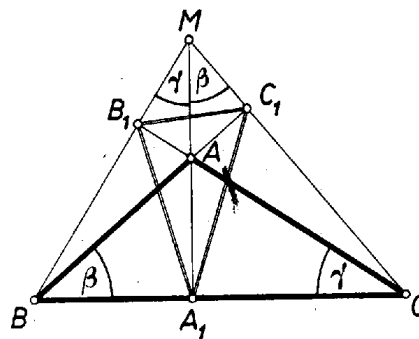
1. ábra

Az AB és AC átmérők fölötti Thalész-körben a kerületi szögek tétele alapján

$$B_1A_1A \sphericalangle = B_1BA \sphericalangle = 90^\circ - \alpha, \quad AA_1C_1 \sphericalangle = ACC_1 \sphericalangle = 90^\circ - \alpha,$$

és így $B_1A_1C_1 \sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$. Hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének szögei rendre egyenlők az eredeti háromszög szögei pótszögeinek 2-szeresével.

Tompaszögű háromszög M magasságpontja kívül esik a háromszögön – a 2. ábrán $BAC \sphericalangle = \alpha > 90^\circ$ – és M az A -ból húzott magasságnak a csúcson, a B és C -ből húzott magasságnak pedig a talpponton túli meghosszabbításán van.



2. ábra

Így M a hegyesszögek B, C csúcsával hegyesszögű háromszöget alkot, – ugyanis

$$\begin{aligned} MBC \sphericalangle &= B_1BC \sphericalangle = 90^\circ - \gamma < 90^\circ, \text{ ugyanígy } MCB \sphericalangle = 90^\circ - \beta < 90^\circ, \\ BMC \sphericalangle &= BMA_1 \sphericalangle + A_1MC \sphericalangle = \gamma + \beta = 180^\circ - \alpha < 90^\circ, \end{aligned}$$

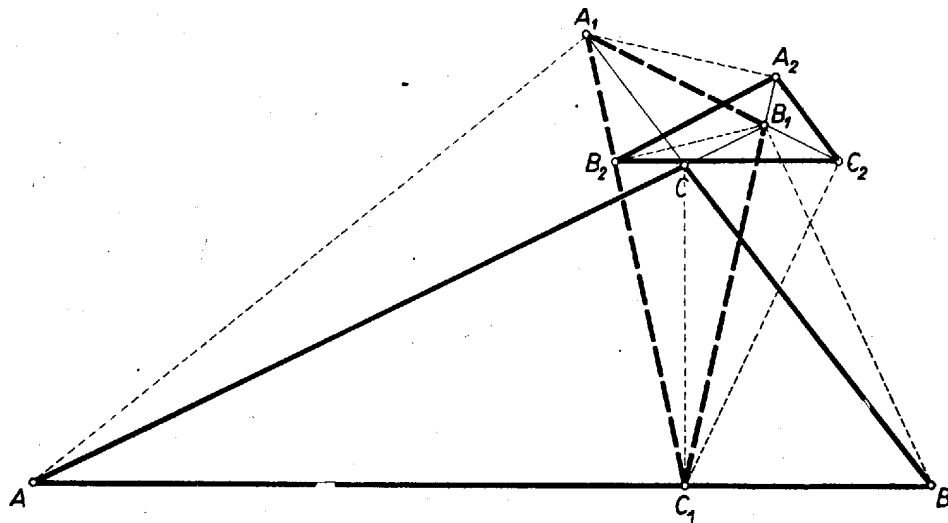
és az MBC háromszög talpponti háromszöge egybeesik az ABC háromszögével, az M, B és C -ből húzott magasság talppontja rendre A_1, C_1, B_1 . Így az előzők alapján:

$$\begin{aligned} B_1A_1C_1 \sphericalangle &= 180^\circ - 2BMC \sphericalangle = 180^\circ - 2(180^\circ - \alpha) = 2\alpha - 180^\circ, \\ A_1B_1C_1 \sphericalangle &= 180^\circ - 2MCB \sphericalangle = 180^\circ - 2(90^\circ - \beta) = 2\beta, \\ A_1C_1B_1 \sphericalangle &= 180^\circ - 2MBC \sphericalangle = 180^\circ - 2(90^\circ - \gamma) = 2\gamma. \end{aligned}$$

Eszerint tompaszögű háromszög talpponti háromszögének két szöge 2-szer akkora, mint az eredeti háromszög megfelelő hegyes szöge, a harmadik pedig 180° -kal kisebb a tompaszög 2-szeresénél.

(Derékszögű háromszögben a magasságtalppontok nem alkotnak valódi háromszöget.)

Mármost az adott H háromszög tompaszögű, mert első két szögének összege kisebb a harmadiknál. Egyszerűség kedvéért legyen a legkisebb szög δ , ekkor a további kettő $2\delta, 4\delta$, és összegük $7\delta = 180^\circ$. Így a fentiek szerint T_1 -ben A_1 -nél $2\delta, B_1$ -nél $4\delta, C_1$ -nél pedig $8\delta - 180^\circ = \delta$ nagyságú szög van. Így H és a belőle leszármaztatott T_1 hasonló, mert szögeik egyenlő párokba kapcsolhatók. Ebből következik, hogy T_1 és a belőle ugyanazon eljárással leszármaztatott T_2 is hasonló, tehát T_2 a H -hoz is hasonló. Ugyanígy H -nak bármely sorszámu talpponti háromszöge hasonló H -hoz (3. ábra).



3. ábra

Megmutatjuk, hogy T_2 és H -nak B_2C_2 és AB oldala párhuzamos. Ehhez elég belátni, hogy $C_2B_2C_1$ és A_1C_1A váltószögek, vagyis a B_2C_2 és C_1A félegyenesek T_1 megfelelő $C_1A_1 = b_1$ oldalának C_1B_2 szakaszával ugyanakkora szöveget zárnak be, továbbá hogy b_1 -nek ellentétes oldalán vannak. E két szöveget meghatározó ponthármások szerkesztésüknél fogva egymás megfelelői. Ugyanis a fenti két hasonlóságot így is kimondhatjuk: a T_1 és T_2 hat csúcsából álló pontrendszer hasonló a H és T_1 hat csúcsából álló pontrendszerhez. És mivel H és T_1 hasonlóságában A, B, C -nek rendre az ugyanakkora szög C_1, A_1, B_1 csúcsa felel meg, ugyanígy T_1 és T_2 hasonlóságában A_1, B_1, C_1 -nek sorra C_2, A_2, B_2 , azért a T_1, T_2 rendszer

$$A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$$

csúcsai egymás után a H, T_1 , rendszer

$$B, C, A, B_1, C_1, A_1$$

csúcsainak felelnek meg, és így valóban $C_2B_2C_1 \triangleleft A_1C_1A \triangleleft$. – C_1 az AB szakaszon van, A_1 pedig BC -nek C -n túli meghosszabbításán, ezért B és C a b_1 -nek A -val ellentett oldalán vannak, továbbá B_1 és C_2 is, mert B_1 az AC oldal C -n, C_2 pedig az A_1B_1 oldal B_1 -en túli meghosszabbításán van; eszerint B_1 valóban szétválasztja A_1 -et és C_2 -t. Így fennáll, hogy $B_2C_2 \parallel AB$. – Hasonlóan $C_2A_2 \parallel BC$. Végül $B_2A_2B_1 \triangleleft C_1B_1C \triangleleft$, továbbá B_2 és C a B_1C_1 egyenes ugyanazon oldalán vannak, ezért a szögek egyállásúak: $A_2B_2 \parallel CA$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A G háromszög egyenlő szárú és tompaszögi, mert kisebb szögeit ε -nal jelölve a nagyobb 8ε , és ez nagyobb $\varepsilon + \varepsilon$ -nál. Így a szögek összegéből $10\varepsilon = 180^\circ$. Talpponti háromszögének, U_1 -nek szögei $2\varepsilon, 2\varepsilon$ és $16\varepsilon - 180^\circ = 6\varepsilon$, így ez is tompaszögű, ennél fogva második talpponti háromszögének, U_2 -nek szögei $4\varepsilon, 4\varepsilon, 2\varepsilon$, ez tehát hegyesszögű. Továbbmenve U_2 első két szöge $180^\circ - 8\varepsilon = 2\varepsilon$, a harmadik $180^\circ - 4\varepsilon = 6\varepsilon$, vagyis U_3 hasonló U_1 -hez és hasonlóan U_4 hasonló U_2 -höz. Így G minden páratlan sorszámú talpponti háromszöge U_1 -hez hasonló, a páros sorszámúak pedig U_2 -höz, tehát egyik sem hasonló G -hez.

Kövessi Ágnes (Budapest, Szilágyi Erzsébet lg. II. o.t.)