

I. Legyen R_1 és R_2 oldalainak száma n_1 , ill. n_2 , így az egy oldalukhoz tartozó középponti szög fokban vett mértékszám $360/n_1$, ill. $360/n_2$, tehát az adatok szerint egyrészt

$$(1) \quad n_2 - n_1 = p,$$

másrészt

$$(2) \quad \frac{360}{n_1} - \frac{360}{n_2} = \gamma, \quad \text{másképpen}$$

$$(2a) \quad \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 n_2} = \frac{\gamma}{360}.$$

Innen n_2 kiküszöbölésével

$$n_1^2 + p n_1 - \frac{360p}{\gamma} = 0.$$

Az n_1 -et nem tartalmazó tag negatív – ugyanis p -t és γ -t természetesen pozitívnak tekintjük –, ezért egyrészt a diszkrimináns pozitív, tehát a gyökök valósak, másrészt – mivel ez a tag a két gyök szorzatával egyenlő – a gyökök ellentett előjelűek. Feladatunkban csak pozitív egész gyöknek van értelme, ezért a megoldás a diszkrimináns pozitív négyzetgyökével

$$(3) \quad n_1 = \frac{1}{2} \left(-p + \sqrt{p^2 + \frac{1440p}{\gamma}} \right), \quad \text{és így} \quad n_2 = \frac{1}{2} \left(p + \sqrt{p^2 + \frac{1440p}{\gamma}} \right),$$

hacsak e két kifejezés egész számot ad, és n_1 értéke legalább 3.

A számadatokkal $n_1 = 30$, $n_2 = 35$. Valóban, így az egy oldalhoz tartozó középponti szög 12° , ill. $360^\circ/35 = 72^\circ/7$, és az előbbi többsége $12^\circ/7$.

II. Adott p esetén γ lehetséges értékeit a (2a) és (1)-ből előálló

$$(4) \quad \gamma = \frac{p}{n_1(n_1 + p)} 360$$

kifejezés adja meg, ha n_1 helyére a 3, 4, 5, ... számokat helyettesítjük, ugyanis R_1 oldalainak száma legalább 3. Az adódó γ -értékek csökkenő sorozatot alkotnak, mert (4)-ben a számláló állandó, a nevező pedig növekvő. Az adott $p = 2$ -vel

$$(5) \quad \gamma = 48^\circ, 30^\circ, 20\frac{4}{7}^\circ, 15^\circ, 11\frac{3}{7}^\circ, 9^\circ, 7\frac{3}{11}^\circ, 6^\circ, \dots$$

III. (2)-ből látható, hogy megoldás csak racionális γ mellett várható.

$$(6) \quad \frac{1}{n_2} = \frac{1}{n_1} - \frac{\gamma}{360} = \frac{360 - n_1 \gamma}{360 n_1}, \quad \text{és így}$$

$$n_2 = \frac{360 n_1}{360 - n_1 \gamma},$$

ennélfogva (1)-ből – ismét $n_1 = 3, 4, 5, \dots$ mellett – akkor kapunk a feladatnak megfelelő p -t, ha (6) pozitív egésznek adódik. A pozitívsághoz szükséges, hogy álljon

$$360 - n_1 \gamma > 0, \quad \text{azaz} \quad n_1 < \frac{360}{\gamma}.$$

Eszerint (6) egész voltát a

$$(7) \quad 3 \leq n_1 < \frac{360}{\gamma}$$

értékek mellett kell megvizsgálunk. Minden egész n_2 esetén egy megfelelő p -értéket kapunk (1)-ből.

Pl. $\gamma = 30^\circ$ mellett (7)-ből $3 \leq n_1 < 12$ és (6)-ből

$$n_2 = \frac{12 n_1}{12 - n_1} \quad \text{és} \quad p = n_2 - n_1 = \frac{n_1^2}{12 - n_1}$$

egész, ha

$$n_1 = 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, \quad \text{és így}$$

$$p = 1, 2, 6, 16, 27, 50, 121.$$

Hasonlóan $\gamma = 12^\circ$ mellett $3 \leq n_1 < 30$, $n_2 = 30n_1/(30 - n_1)$, $p = n_1^2/(30 - n_1)$ és a megfelelő n_1 , n_2 , p értékhármasok a következők:

$$\begin{aligned}n_1 &= 5, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, \\n_2 &= 6, 15, 20, 30, 45, 60, 70, 120, 150, 195, 270, 420, 870, \\p &= 1, 5, 8, 15, 27, 40, 49, 96, 125, 169, 243, 392, 841.\end{aligned}$$

Fazekas Patrik (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (4) helyébe más kifejezést kapunk abból, hogy a (3)-beli négyzetgyök alatt teljes négyzetnek kell állania, így

$$p^2 + \frac{1440p}{\gamma} = q^2 \quad \text{és} \quad \gamma = \frac{1440p}{q^2 - p^2},$$

ahol q a p -nél nagyobb és vele egyenlő párosságú olyan egész szám, amelyre (3)-ból $2n_1 = q - p \geq 6$, tehát $q \geq p + 6$. Így $q = p + 6, p + 8, p + 10, p + 12, \dots$ (Ugyanis (3)-ból n_1 és n_2 akkor és csak akkor egész, ha a négyzetgyökhöz akár p -t, akár $-p$ -t adva páros számot kapunk.) $p = 2$ -vel $\gamma = 2880/(q^2 - 4)$, ahol $q = 8, 10, 12, 14, \dots$ Így ismét (5)-re jutunk.

Kunszt Zoltán (Pápa, Türr I. g. II. o. t.)

2. Többen a (3) általános megoldás helyett mindjárt a számpélda eredményét számították ki. Mivel a feladat első kérdése a számadatok előtt fejeződik be, azért – gondos olvasó előtt – nyilvánvaló, hogy a választ általában kell megadni, és ebbe az eredménybe kell az adatokat behelyettesíteni. – Ezúttal is több dolgozat indokolatlanul „egész–szám–kultuszt űzőtt”: a számpélda ellenére γ -ról feltette, hogy egész szám. Az ilyen dolgozatok nem teljes megoldások.