

I. Azok az n (egész) számok k jegyűek, amelyekre $10^{k-1} \leq n < 10^k$. Mivel $2^{100} = N$ nem lehet 10 hatványa, hiszen utolsó jegye nem 0, azért elegendő azt megállapítanunk N -ről, hogy a 10-nek mely két szomszédos hatványa közé esik.

Könnyen kiszámítható, hogy $2^{10} = 1024$ (kisebb hatvány kiszámítását a feladat nem tiltja), ennélfogva $2^{10} > 1000 = 10^3$. Mindkét oldalt 10-ik hatványra emelve $2^{100} > 10^{30}$, eszerint N legalább 31 jegyű, mert 10^{30} a legkisebb 31 jegyű szám.

Megmutatjuk, hogy N pontosan 31-jegyű, mert $N < 10^{31}$. Mivel $N = (1,024 \cdot 10^3)^{10} = 10^{30} \cdot 1,024^{10}$ így $1,024^{10}$ -re kell alkalmas (10-nél kisebb) felső korlátot keresnünk. Elég lesz $1,024$ helyett a nála nagyobb $1,1$ szám 10-edik hatványát vizsgálnunk. Minden hatványt fölfelé kerekítve egy tizedes jegyre

$$\begin{aligned} 1,1^2 &= 1,21 < 1,3, & \text{így} & \quad 1,1^4 < 1,3^2 = 1,69 < 1,7, \\ 1,1^5 &= 1,1^4 \cdot 1,1 < 1,7 \cdot 1,1 = 1,87 < 1,9, & & \quad 1,1^{10} < 1,9^2 = 3,61. \end{aligned}$$

Így valóban

$$N = 1,024^{10} \cdot 10^{30} < 1,1^{10} \cdot 10^{30} < 3,61 \cdot 10^{30} < 10^{31}.$$

II. Az utolsó 3 számjegy meghatározásához megjegyezzük, hogy két egész szám szorzatának utolsó 3 jegyét a tényezők ezres és magasabb helyi értékű jegyei nem befolyásolják. Valóban legyen a két tényező A és B , az utolsó 3 jegyükkel leírt szám A_1 , ill. B_1 , vagyis $A = 10^3C + A_1$, $B = 10^3D + B_1$, ahol C és D alkalmas pozitív egész szám. Elegendő belátnunk, hogy az $E = AB - A_1B_1$ különbség többszöröse $1000 = 10^3$ -nak. Valóban

$$E = (10^3C + A_1)(10^3D + B_1) - A_1B_1 = (10^3CD + A_1D + B_1C)10^3 = F \cdot 10^3,$$

ahol F pozitív egész szám.

A bebizonyított állításból $B = A$ -val adódik, hogy pozitív egész szám négyzetének utolsó három jegyét úgy kaphatjuk, hogy vesszük a szám utolsó három jegyéből álló szám négyzetének utolsó három jegyét.

A fentiek szerint 2^{10} utolsó három jegyével írt szám 024, eszerint a 2^{20} utolsó három jegyével írt szám $24^2 = 576$; a 2^{40} utolsó három jegyével írt szám $576^2 = 331\,776$ -ból 776; a 2^{80} utolsó három jegyével írt szám $776^2 = 602\,176$ -ból 176, végül $2^{100} = 2^{80} \cdot 2^{20}$ utolsó három jegyével írt szám $176 \cdot 576 = 101\,376$ -ból 376. Ezek szerint N utolsó három jegye: 3, 7, 6.

III. Ahogyan az utolsó három jeggyel írt számokat számítottuk, ugyanúgy számíthatjuk az említett hatványok értékét is. Ennélfogva N -et $2^{10} = 1024$ -ből kiindulva 3 négyzetreemeléssel, majd egy szorzással kaphatjuk. Egyébként 2^{10} -et is hasonlóan számíthatjuk: $2^{10} = 2^8 \cdot 2^2 = \left[(2^2)^2\right]^2 \cdot 2^2$.

Szidarovszky Ferenc (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. I. o. t.)

Megjegyzések. I. Az $N < 10^{31}$ egyenlőtlenség bizonyítására számtalan különböző út lehetséges. Bemutatunk néhány olyat, amely a fentitől különböző lépésekben, alkalmas fogásokkal jut el a 100-ik hatványhoz.

$$\begin{aligned} a) \quad 2^{11} &= 2,048 \cdot 10^3 < 2,1 \cdot 10^3, & \text{ezért} & \quad 2^{33} = (2^{11})^3 < 2,1^3 \cdot 10^9 = \\ &= 9,261 \cdot 10^9 < 10^{10}, & \text{innen} & \quad 2^{99} < 10^{30}, & \text{végül} & \quad 2^{100} < 2 \cdot 10^{30} < 10^{31}. \end{aligned}$$

Góth László (Budapest, Könyves Kálmán Gimn. II. o. t.)

$$b) \quad 2^{100} = 2^9 \cdot 2^{91} = 512(2^{13})^7 < 1000 \cdot 8192^7 < 10^3 \cdot (10^4)^7 = 10^{31}.$$

Tasnády Mária (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. I. o. t.)

$$\begin{aligned} c) \quad 2^9 &= 512 < 625 = 5^4, & \text{innen} & \quad 7\text{-ik hatványra emeléssel} & \quad 2^{63} < 5^{28}, & \text{tehát} \\ & & & & & & 2^{100} = 2^{63} \cdot 2^{37} < 5^{28} \cdot 2^{37} = 10^{28} \cdot 2^9 = 512 \cdot 10^{28} < 10^{31}. \end{aligned}$$

Kóta József (Tatabánya, Árpád Gimn. II. o. t.)

d) Végül a feladatot kitzúzásra javasoló tanuló bizonyítása:

$$\begin{aligned} 1,024^{10} &< 1,025^{10} = \left(\frac{41}{40}\right)^{10} = \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{40} < \\ &< \frac{41}{40} \cdot \frac{40}{39} \cdot \frac{39}{38} \cdot \frac{38}{37} \cdot \frac{37}{36} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{35}{34} \cdot \frac{34}{33} \cdot \frac{33}{32} \cdot \frac{32}{31} = \frac{41}{31} < 2 < 10, \end{aligned}$$

mert ha $a > b > 1$, akkor

$$\frac{a}{b} < \frac{a-1}{b-1}.$$

2. A 2^{100} hatvány kiszámítható 6 négyzetreemeléssel és ezt követő 2 szorzással is; $2^{100} = 2^{64} \cdot 2^{32} \cdot 2^4$ és itt $2^4 = (2^2)^2$, továbbá $32 = 2^5$ és $64 = 2^6$ alapján az első két tényező a 6-ik, ill. 5-ik négyzetre emelés eredménye.