

Kifejtéssel és összevonással kifejezésünk így alakul:

$$(1a) \quad 10a^2 + 40ad + 50d^2.$$

Próbáljuk meg ezt

$$(2) \quad (xa + yd)^2 + (za + ud)^2 \equiv (x^2 + z^2)a^2 + 2(xy + zu)ad + (y^2 + u^2)d^2$$

alakban előállítani, ahol x, y, z, u egész számok, ezeket kell úgy meghatároznunk, hogy a^2 , ad és d^2 együtthatói megegyezzenek (1a) megfelelő együtthatóival:

$$(3) \quad x^2 + z^2 = 10,$$

$$(4) \quad 2(xy + zu) = 40,$$

$$(5) \quad y^2 + u^2 = 50.$$

Könnyű belátni, hogy (3)-at csak azok az egész számpárok elégítik ki, amelyekre

$$|x| = 3, \quad |z| = 1 \quad \text{és} \quad |x| = 1, \quad |z| = 3.$$

Azonban tekintettel a (2) bal oldalán álló kifejezések szimmetriájára és négyzet jellegére, az általánosság csorbítása nélkül előírhatjuk, hogy x és z pozitívok legyenek, továbbá teljesüljön $x \geq z$. Így feladatunk arra egyszerűsödött, hogy $x = 3$ és $z = 1$ mellé kell keresnünk a (4) és (5)-öt kiegészítő egész y, u számpárokat.

(4)-ből következik, hogy y és u nem lehet egyidejűleg negatív, továbbá, hogy ha y negatív, akkor abszolút értéke kisebb, mint u . Könnyen belátható most már, hogy (5) számbajövő összes megoldásai:

$$\begin{array}{ccccccc} y = 7, & 7 & 5, & 5, & 1, & 1, & -1, \\ u = 1, & -1, & 5, & -5, & 7, & -7, & 7. \end{array}$$

Ezekkel (4) bal oldala rendre az alábbi értékeket veszi fel:

$$44, 40, 40, 20, 20, -8, 8.$$

Eszerint (2)-nek lényegében két különböző megoldása van:

$$\begin{array}{lllll} \text{I.} & x = 3, & y = 7, & z = 1, & u = -1, \\ \text{II.} & x = 3, & y = 5, & z = 1, & u = 5, \end{array}$$

és (1)-nek két a kívánt alakú, két tagú négyzetösszeg előállítását kaptuk:

$$a^2 + 2(a + d)^2 + 3(a + 2d)^2 + 4(a + 3d)^2 = \begin{cases} (3a + 7d)^2 + (a - d)^2, \\ (3a + 5d)^2 + (a + 5d)^2. \end{cases}$$

Németh István (Budapest. Bolyai J. Gimn. II. o. t.)