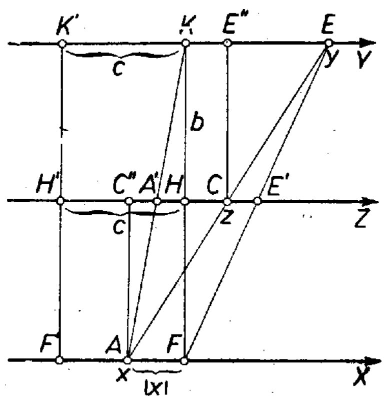
Figyeljük meg a megadott ábrák következő tulajdonságait: Mindegyik skála egyenletes, egymástól legfeljebb az egységszakasz hosszában és a skála irányításában különböznek. Így valamennyi skála alkalmas az egyenes egy szakasza hosszának az illető skála egységében való megmérésére, evégett csupán a végpontokhoz írt skálaértékek különbségét kell vennünk. Pl. GB hossza a V-skálán $14-0=14$ egység, az U-skálán $0-(-1{,}4)=1{,}4$ egység; JD hossza a T-skálán $7{,}5-3=4{,}5$ egység, az S-skálán $2{,}5-0{,}25=2{,}25$ egység. Továbbá mindegyik részfeladatban szereplő három skála olyan egymással párhuzamos egyeneseken fekszik, melyek közül a középső egyenlő távolságra van a szélsőktől; így ha a szélső skálákon két pontot választunk, akkor az ezekkel és e két skála 0-pontjával meghatározott trapéz középvonala a középső skálára esik.

1. Az X-, Y-, Z-skálahármas és az $\overline{xy}$ egyenes esetében tekintsük az $AFKE$ trapézt, és ennek HC középvonalát. A skálák 0-pontjai az FK egyenesen vannak, egységeik egyenlők, irányításuk megegyező. Ha A és E az X-, ill. Y-skála pozitív felén van, akkor ugyanez áll C-re, és $FA=x$, $KE=y$, $HC=z$, tehát valóban

$$z=HC=\frac{FA+KE}{2}=\frac{x+y}{2}. \tag{1}$$

Az állítás akkor is érvényes, ha A és E mindegyike a skálák negatív felén van. Ekkor C is a Z-skála negatív oldalán van, és az FA, KE, HC szakasz hossza az A, E, ill. C ponthoz írt skálaérték abszolút értéke, vagyis $FA=|x|=-x$, $KE=|y|=-y$, $HC=|z|=-z$. Ezeket beírva $HC=(FA+KE)/2$-be, majd (-1)-gyel szorozva az állításra jutunk. – Ha A és E egyike a megfelelő skála 0-pontjába kerül, vagyis $x=0$, ill. $y=0$, akkor (1)-et az $AFKE$ trapéz helyett az AKE, ill. AFK háromszög és HC középvonala felhasználásával bizonyítjuk. Ha pedig A és E mindegyike 0-pontba, F, ill. K-ba jut, akkor C a H-ba esik, és az állítás érvényessége nyilvánvaló.

Végül, ha az FK egyenes szétválasztja az A és E pontokat, tehát x és y ellentett előjelűek, akkor az $AFKE$ négyszög hurkolt trapéz (más szóval HC a közönséges $AFEK$ trapézban az átlók felezőpontjainak távolsága). x és y-nak az állításban látható szimmetriája alapján feltehetjük, hogy $FA\le KE$, vagyis $|x|\le|y|$. Ha $|x|=|y|$, vagyis $x=-y$, $x+y=0$, akkor az $AFEK$ négyszög paralelogramma, AE felezi FK-t, így $C\equiv H$, $z=0=(x+y)/2$. Ha pedig $|x|<|y|$, akkor C azon az oldalán van FK-nak, mint E, vagyis z előjele egyezik y-éval. Messe a Z-tengely AK-t A'-ben, FE-t E'-ben (3. ábra).



3. ábra

Ekkor az $AFEK$ trapézból $A'E'=(|x|+|y|)/2$, az AFK és AFE háromszögekből $A'H=CE'=AF/2=|x|/2$, ezért

$$HC=A'E'-(A'H+CE')=\frac{|x|+|y|}{2}-|x|=\frac{|y|-|x|}{2},$$

és ebből

$$y>0,\ \text{tehát}\ x<0,\ z>0\ \text{esetén}\ z=\frac{y-(-x)}{2}=\frac{x+y}{2},$$
$$y<0,\ \text{tehát}\ x>0,\ z<0\ \text{esetén}\ -z=\frac{-y-x}{2},$$

vagyis (1) ekkor is helyes. – Mindezek szerint az X-, Y-, Z-skálahármas az x és y számok z számtani középértékének leolvasására alkalmas nomogram.

2. A Z-skálától a 2. részfeladatban helyébe lépő és vele egy egyenesen levő W-skála csak abban különbözik, hogy egysége feleakkora, ezért bármely szakasz mértékszáma a W-skálán 2-szer akkora, mint a Z-skálán: $w=2z$ (ez az összefüggés negatív z és w mellett is fennáll). Innen $z=w/2$ és ezt (1)-be helyettesítve, majd 2-vel szorozva $w=x+y$ (x és y előjelének bármilyen megválasztása esetén is).

Ha már most az $\overline{xy}$ egyenes a W-skálát a w számmal jelölt pontban metszi, akkor az x, y, w számokkal jelölt pontok egy egyenesen vannak, tehát az $\overline{xw}$ egyenes átmegy azon y számhoz tartozó ponton, amelyre $w=x+y$, vagyis $y=w-x$. Ezek szerint az X-, Y-, W-skálahármas (kéttagú) összeadásra és kivonásra alkalmas nomogram, az összeg a középső skálán olvasható le, a különbség leolvasásához pedig a kisebbítendőt a középső, a kivonandót az egyik szélső skálán keressük meg, és ekkor a különbség a másik szélső skálán adódik.

3. V-skála egysége az X- és Z-skálák egységének negyedrésze. Ha V helyén az X- és Z-vel azonos, vagyis 4-szer nagyobb egységű V' skála állna, akkor az 1. pont szerint

$$v' = \frac{x+z}{2} \tag{2}$$

lenne, hiszen így X, Z és V' között ugyanaz a kapcsolat állna, mint X, Y és Z között (a skálák egymástól való távolságai feleakkorák, de egymás között egyenlők). Mivel pedig $v = 4v'$, vagyis $v' = v/4$, ezt (2)-be helyettesítve, majd 4-gyel szorozva:

$$\frac{v}{4} = \frac{x+z}{2}, \qquad \text{tehát valóban} \qquad v = 2(x+z). \tag{3}$$

4. Az U-skála egysége a V-skála egységének tízszerese, kezdőpontjuk közös (a G pont), de pozitív irányuk ellentétes. Eszerint $u = -v/10$, $v = -10u$, tehát ezt (3)-ba helyettesítve, majd -10-zel osztva, ill. rendezéssel

$$-10u = 2(x+z), \qquad u = -\frac{x+z}{5}, \qquad 5u + x + z = 0.$$

A 3. és 4. vizsgálatokat összefoglalva: a középső skálán (változatlan kezdőpont mellett) ahányszor kisebb (ill. nagyobb) egységet használunk, az összeget ugyanannyiszor nagyobbítva (ill. kisebbítve) kapjuk.

E skálahármasok a $z = v/2 - x$, ill. $z = -5u - x$ összefüggésekhez is használhatók.

5. Az Y-, Z- és T-skálák egységei és irányításuk egyezők, akárcsak az X-, Y-, Z-hármasban, de T-nek 0-pontja nem az Y- és Z-skálák 0-pontját összekötő egyenesen van, hanem attól 3 egységnyire a negatív irányban, a -3 szám „helyén." Ha tehát T helyére egy az Y-nal egyező egységű és irányítású, J- kezdőpontú T'-skálát tennénk, akkor ezen (1) szerint $t' = (y+z)/2$-t olvashatnánk le. Így viszont $t = t' + 3$, vagyis $t' = t - 3$, és ezt behelyettesítve

$$t - 3 = \frac{y+z}{2}, \qquad t = \frac{y+z+6}{2}, \qquad 2t - y - z - 6 = 0, \tag{4}$$

amit bizonyítanunk kellett. Általában, ha a számtani közép mellett egy állandó c tag szerepel, ezt a kifejezés értékének leolvasására készített nomogramban az eredményskála $-c$-vel való eltolásával vehetjük figyelembe.

6. Az S-skálán az Y-, Z- és T-hez képest 2-szer akkora egység szerepel, irányítása ellentétes – e két tényt úgy is kimondhatjuk, hogy S egysége (-2)-szerese T egységének –, továbbá S kezdőpontja T-éhez képest (T egységében mérve) 8 egységgel el van tolva. Ha S helyére először a T-nek 8 egységgel való eltolásával készült S' skálát tesszük; ezen $s' = t - 8$, ill. $t = s' + 8$, tehát (4)-ből

$$2s' - y - z + 10 = 0.$$

Most már S' és S kezdőpontjai közösek és $s = -s'/2$, $s' = -2s$, azért folytatólag $4s + y + z - 10 = 0$

A 2–6. esetekben nincs szükség az előjelek vizsgálatára, mert végső soron mindegyik állítást (1)-re vezettük vissza.

Csákó György (Sátoraljaújhely, Kossuth L. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az (1) összefüggést vegyes előjelű x és y esetére az alábbiak szerint is beláthatjuk. Toljuk el az F, K, H pontokat a maguk skáláján annak negatív irányában akkora c távolságra, hogy a kapott F', K'-höz képest A és E pozitív irányban legyenek. Ekkor C is pozitív irányban van H'-től, továbbá $F'A = x + c > 0$, $K'E = y + c > 0$, $H'C = z + c > 0$, és az $AF'K'E$ (közönséges) trapézból (3. ábra)

$$z + c = \frac{(x+c) + (y+c)}{2}, \qquad \text{és így} \qquad z = \frac{x+y}{2}.$$

2. Megkaphatjuk (1)-et így is: feltehetjük, hogy $x < y$. Messe az A-n át b-vel párhuzamos egyenes Z-t C''-ben és a C-n át b-vel párhuzamos az Y-t E''-ben. Ekkor $C''C = z - x (> 0)$, $E''E = y - z (> 0)$ és az ACC'', CEE'' háromszögek könnyen belátható egybevágósága alapján

$$C''C = E''E\text{-ből} \qquad z - x = y - z, \qquad z = \frac{x+y}{2}.$$

Mikes Endre (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)