

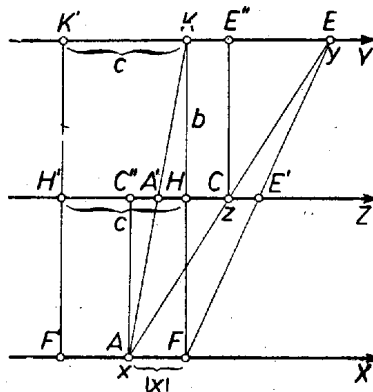
Figyeljük meg a megadott ábrák következő tulajdonságait: Mindegyik skála egyenletes, egymástól legfeljebb az egységszakasz hosszában és a skála irányításában különböznek. Így valamennyi skála alkalmas az egyenes egy szakasza hosszának az illető skála egységében való megmérésére, evégett csupán a végpontokhoz írt skálaértékek különbségét kell vennünk. Pl. GB hossza a V -skálán $14 - 0 = 14$ egység, az U -skálán $0 - (-1,4) = 1,4$ egység; JD hossza a T -skálán $7,5 - 3 = 4,5$ egység, az S -skálán $2,5 - 0,25 = 2,25$ egység. Továbbá mindegyik részfeladatban szereplő három skála olyan egymással párhuzamos egyeneseken fekszik, melyek közül a középső egyenlő távolságra van a szélsőktől; így ha a szélső skálákon két pontot választunk, akkor az ezekkel és a két skála 0-pontjával meghatározott trapéz középvonala a középső skálára esik.

1. Az X -, Y -, Z -skálahármas és az \overline{xy} egyenes esetében tekintsük az $AFKE$ trapézt, és ennek HC középvonaltát. A skálák 0-pontjai az FK egyenesen vannak, egységeik egyenlők, irányításuk megegyező. Ha A és E az X -, ill. Y -skála pozitív felén van, akkor ugyanez áll C -re, és $FA = x$, $KE = y$, $HC = z$, tehát valóban

$$(1) \quad z = HC = \frac{FA + KE}{2} = \frac{x + y}{2}.$$

Az állítás akkor is érvényes, ha A és E mindegyike a skálák negatív felén van. Ekkor C is a Z -skála negatív oldalán van, és az FA , KE , HC szakasz hossza az A , E , ill. C ponthoz írt skálaérték abszolút értéke, vagyis $FA = |x| = -x$, $KE = |y| = -y$, $HC = |z| = -z$. Ezeket beírva $HC = (FA + KE)/2$ -be, majd (-1) -gyel szorozva az állításra jutunk. – Ha A és E egyike a megfelelő skála 0-pontjába kerül, vagyis $x = 0$, ill. $y = 0$, akkor (1)-et az $AFKE$ trapéz helyett az AKE , ill. AFK háromszög és HC középvonala felhasználásával bizonyítjuk. Ha pedig A és E mindegyike 0-pontba, F , ill. K -ba jut, akkor C a H -ba esik, és az állítás érvényessége nyilvánvaló.

Végül, ha az FK egyenes szétválasztja az A és E pontokat, tehát x és y ellentett előjelűek, akkor az $AFKE$ négyszög hurkolt trapéz (más szóval HC a közösleges $AFEK$ trapézban az átlók felezőpontjainak távolsága). x és y -nak az állításban látható szimmetriája alapján feltehetjük, hogy $FA \leq KE$, vagyis $|x| \leq |y|$. Ha $|x| = |y|$, vagyis $x = -y$, $x + y = 0$, akkor az $AFEK$ négyszög paralelogramma, AE felezi FK -t, így $C \equiv H$, $z = 0 = (x + y)/2$. Ha pedig $|x| < |y|$, akkor C azon az oldalán van FK -nak, mint E , vagyis z előjele egyezik y -ével. Messe a Z -tengely AK -t A' -ben, FE -t E' -ben (3. ábra).



3. ábra

Ekkor az $AFEK$ trapézból $A'E' = (|x| + |y|)/2$, az AFK és AFE háromszögekből $A'H = CE' = AF/2 = |x|/2$, ezért

$$HC = A'E' - (A'H + CE') = \frac{|x| + |y|}{2} - |x| = \frac{|y| - |x|}{2},$$

és ebből

$$y > 0, \text{ tehát } x < 0, z > 0 \text{ esetén } z = \frac{y - (-x)}{2} = \frac{x + y}{2},$$

$$y < 0, \text{ tehát } x > 0, z < 0 \text{ esetén } -z = \frac{-y - x}{2},$$

vagyis (1) ekkor is helyes. – Mindezek szerint az X -, Y -, Z -skálahármas az x és y számok z számtani középértékének leolvasására alkalmas nomogram.

2. A Z -skálától a 2. részfeladatban helyébe lépő és vele egy egyenesen levő W -skála csak abban különbözik, hogy egysége feleakkora, ezért bármely szakasz mértékszám a W -skálán 2-szer akkora, mint a Z -skálán: $w = 2z$ (ez az összefüggés negatív z és w mellett is fennáll). Innen $z = w/2$ és ezt (1)-be helyettesítve, majd 2-vel szorozva $w = x + y$ (x és y előjelének bármilyen megválasztása esetén is).

Ha már most az \overline{xy} egyenes a W -skálát a w számmal jelölt pontban metszi, akkor az x , y , w számokkal jelölt pontok egy egyenesen vannak, tehát az \overline{xy} egyenes átmegy azon y számhoz tartozó ponton, amelyre $w = x + y$, vagyis $y = w - x$. Ezek szerint az X -, Y -, W -skálahármas (kéttagú) összeadásra és kivonásra alkalmas nomogram, az összeg

a középső skálán olvasható le, a különbség leolvasásához pedig a kisebbítendő a középső, a kivonandót az egyik szélső skálán keressük meg, és ekkor a különbség a másik szélső skálán adódik.

3. V -skála egysége az X - és Z -skálák egységének negyedrésze. Ha V helyén az X - és Z -vel azonos, vagyis 4-szer nagyobb egységű V' skála állna, akkor az 1. pont szerint

$$(2) \quad v' = \frac{x+z}{2}$$

lenne, hiszen így X , Z és V' között ugyanaz a kapcsolat állna, mint X , Y és Z között (a skálák egymástól való távolságai feleakkorák, de egymás között egyenlők). Mivel pedig $v = 4v'$, vagyis $v' = v/4$, ezt (2)-be helyettesítve, majd 4-gyel szorozva:

$$(3) \quad \frac{v}{4} = \frac{x+z}{2}, \quad \text{tehát valóban} \quad v = 2(x+z).$$

4. Az U -skála egysége a V -skála egységének tízszerese, kezdőpontjuk közös (a G pont), de pozitív irányuk ellentétes. Eszerint $u = -v/10$, $v = -10u$, tehát ezt (3)-ba helyettesítve, majd -10 -zel osztva, ill. rendezéssel

$$-10u = 2(x+z), \quad u = -\frac{x+z}{5}, \quad 5u + x + z = 0.$$

A 3. és 4. vizsgálatokat összefoglalva: a középső skálán (változatlan kezdőpont mellett) ahányszor kisebb (ill. nagyobb) egységet használunk, az összeget ugyanannyiszor nagyobbítva (ill. kisebbítve) kapjuk.

E skálahármasok a $z = v/2 - x$, ill. $z = -5u - x$ összefüggésekhez is használhatók.

5. Az Y -, Z - és T -skálák egységei és irányításuk egyezők, akár csak az X -, Y -, Z -hármasban, de T -nek 0-pontja nem az Y - és Z -skálák 0-pontját összekötő egyenesen van, hanem attól 3 egységnyire a negatív irányban, a -3 szám „helyén.” Ha tehát T helyére egy az Y -nal egyező egységű és irányítású, J -kezdőpontú T' -skálát tennénk, akkor ezen (1) szerint $t' = (y+z)/2$ -t olvashatnánk le. Így viszont $t = t' + 3$, vagyis $t' = t - 3$, és ezt behelyettesítve

$$(4) \quad t - 3 = \frac{y+z}{2}, \quad t = \frac{y+z+6}{2}, \quad 2t - y - z - 6 = 0,$$

amit bizonyítanunk kellett. Általában, ha a számtani közép mellett egy állandó c tag szerepel, ezt a kifejezés értékének leolvasására készített nomogramban az eredményskála $-c$ -vel való eltolásával vehetjük figyelembe.

6. Az S -skálán az Y -, Z - és T -hez képest 2-szer akkora egység szerepel, irányítása ellentétes – e két tényt úgy is kimondhatjuk, hogy S egysége (-2) -szerese T egységének –, továbbá S kezdőpontja T -éhez képest (T egységében mérve) 8 egységgel el van tolva. Ha S helyére először a T -nek 8 egységgel való eltolásával készült S' skálát tesszük; ezen $s' = t - 8$, ill. $t = s' + 8$, tehát (4)-ből

$$2s' - y - z + 10 = 0.$$

Most már S' és S kezdőpontjai közösek és $s = -s'/2$, $s' = -2s$, azért folytatólag $4s + y + z - 10 = 0$

A 2–6. esetekben nincs szükség az előjelek vizsgálatára, mert végső soron mindegyik állítást (1)-re vezettük vissza.

Csákó György (Sátoraljaújhely, Kossuth L. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az (1) összefüggést vegyes előjelű x és y esetére az alábbiak szerint is beláthatjuk. Toljuk el az F , K , H pontokat a maguk skáláján annak negatív irányában akkora c távolságra, hogy a kapott F' , K' -höz képest A és E pozitív irányban legyenek. Ekkor C is pozitív irányban van H' -től, továbbá $F'A = x + c > 0$, $K'E = y + c > 0$, $H'C = z + c > 0$, és az $AF'K'E$ (közönséges) trapézból (3. ábra)

$$z + c = \frac{(x+c) + (y+c)}{2}, \quad \text{és így} \quad z = \frac{x+y}{2}.$$

2. Megkaphatjuk (1)-et így is: feltehetjük, hogy $x < y$. Messe az A -n át b -vel párhuzamos egyenes Z -t C'' -ben és a C -n át b -vel párhuzamos az Y -t E'' -ben. Ekkor $C''C = z - x (> 0)$, $E''E = y - z (> 0)$ és az ACC'' , CEE'' háromszögek könnyen belátható egybevágósága alapján

$$C''C = E''E\text{-ből} \quad z - x = y - z, \quad z = \frac{x+y}{2}.$$

Mikes Endre (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)