

C_1 az érintés folytán a d -re P -ben állított m merőlegesen van. Húzzuk meg k -nak A -beli érintőjét, és messe ez m -et B -ben. A BAC_1 és CPC_1 derékszögű háromszögek hasonlóak, mert C_1 -nél levő szögeik csúcsszögek. Innen

tehát

Ennek alapján k_1 szerkesztése a következő. A k egy tetszés szerinti D pontjában húzott érintőre felmérjük a $DE = 2CP$ szakaszt; C körül CE sugárral segédkört írunk, ennek metszéspontja m -mel B ; B -ből érintőt szerkesztünk k -nak ahhoz az ívéhez, amely m -nek C -vel ellentétes partján van, az érintési pont A ; CA -val m -ből kimetsszük C_1 -et; C_1 körül C_1P sugárral kört írunk, ez k_1 .

$$AC_1 : PC_1 = BA : CP = 2 : 1,$$

Ha P különböző C -től és d végpontjaitól, akkor a szerkesztés mindig végrehajtható és 2 megoldást ad, ezek d -re tükrösek. Ha ugyanis D -nek a d -re merőleges átmérő egyik végpontját választjuk, akkor E egyik lehetséges helyzete a D -nek m -re való tükrösképe, ennél fogva m szétválasztja a segédkör C középpontját és E kerületi pontját, tehát metszi a segédkört. B -hez A és A -hoz C_1 szerkesztése egyértelmű.

Minkó Béla (Budapest, I. László g. II. o. t.)

Sonnevend György (Celldömölk, Berzsenyi D. g. II. o. t.)

II. megoldás: Használjuk tovább is az I. megoldás jelöléseit. Írjunk C_1 körül A -n átmenő, vagyis $2\ C_1P$ sugarú k_2 kört, és legyen ennek a C_1P félegyenessel közös pontja P_2 (2. ábra).

IV. megoldás: Legyen k és k_1 sugara R , r , és $CP = p$ ($p < R$). Ekkor a középpontok CC_1 távolsága a $2r = C_1A = CA - CC_1 = R - CC_1$ követelményből $CC_1 = R - 2r$. Így a CPC_1 derékszögű háromszögből Püthagorász tétele alapján

$$(1) \quad (R - 2r)^2 - r^2 - p^2 = 3r^2 - 4Rr + (R^2 - p^2) = 0,$$

és innen

$$r = \frac{2R \pm \sqrt{R^2 + 3p^2}}{3}.$$

Mindkét gyök pozitív, mert a diszkrimináns pozitív és $4R/3$ összegük, valamint $(R^2 - p^2)/3$ szorzatuk pozitív. Számunkra csak a kisebb gyök felel meg, mert a nagyobb gyökre fennáll

$$r = \frac{2R + \sqrt{R^2 + 3p^2}}{3} > \frac{2R + R}{3} = R,$$

ez pedig lehetetlen.

A kisebb gyök szerkesztése: Legyenek a d átmérő végpontjai L , M , legyen P tükörképe C -re Q , és a PQ oldalra szerkesztett szabályos háromszög harmadik csúcsa N . Ekkor $CN = \sqrt{3}p$, és így $LN^2 = R^2 + 3p^2$, tehát LN -et L -ből M felé rámérve d -re és a végpontot S -sel jelölve r -et az MS szakasz harmadrésze adja.

Bede Andrea (Budapest, Szilágyi E. lg. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Meg lehet mutatni, hogy az (1) egyenlet nagyobb gyökével $CC_1 = -(R - 2r) = 2r - R$ teljesül, vagyis $CC_1 + R = 2r$, eszerint k -nak k_1 -től legtávolabbi pontja van annyira k_1 -től, mint k_1 sugara.

2. Meg lehet mutatni, hogy a III. megoldásban adott szerkesztés a C_1P szakaszban (1) kisebb gyökét állítja elő, az Apollóniosz-körnek m -mel való, k -n kívül eső metszéspontja pedig annyira van P -től, mint (1)-nek nagyobb gyöke.