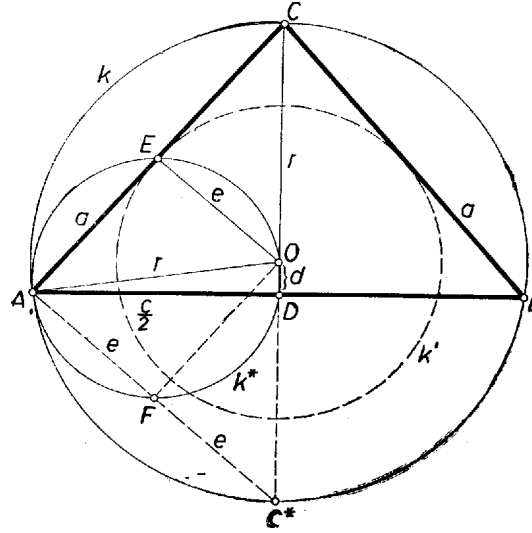


Előzetes megjegyzés: A legtöbb versenyző három derékszögű háromszögre alkalmazta a Püthagorász-tételt, az így kapott egyenletrendszerből számította ki előbb a körülírt kör sugarát, majd az oldalakat, és ezek alapján végezte el a szerkesztést. A sugárra adódott másodfokú egyenletnek csak a pozitív gyökét értelmezték. Elsőnek egy ilyen megoldást mutatunk be.

I. megoldás: Legyen a háromszög köré írt k kör O középpontjának vetülete AB -n D , AC -n E , vagyis $OD = d$, $OE = e$, legyen továbbá $AB = c$, $AC = BC = a$ és $OA = r$. Az OAD , OAE és ACD derékszögű háromszögekből – feltéve, hogy O a háromszög belsejében van, más szóval, hogy C -nél hegyes szög van (1. ábra)



1. ábra

$$(1) \quad \left(\frac{c}{2}\right)^2 = r^2 - d^2,$$

$$(2) \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2 - e^2,$$

$$(3) \quad (r + d)^2 = a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

ugyanis így a háromszögnek a tengelybe eső magassága $r + d$. Célszerű (1) és (2) alapján a -t és c -t kiküszöbölni (3)-ból:

$$(r + d)^2 = 4(r^2 - e^2) - (r^2 - d^2),$$

rendezve

$$(4) \quad r^2 - dr - 2e^2 = 0,$$

és innen

$$(5) \quad r_1 = \frac{d + \sqrt{d^2 + 8e^2}}{2}.$$

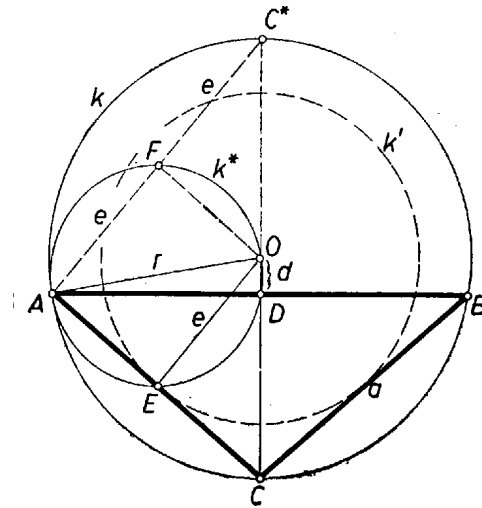
Mivel a diszkrimináns négyzetgyökének abszolút értéke nagyobb d -nél, és így

$$(6) \quad r_2 = \frac{d - \sqrt{d^2 + 8e^2}}{2}$$

negatív, azért csak a pozitív r_1 -et tekintjük megoldásnak. r_1 alapján (1) és (2)-ből

$$(7) \quad c = \sqrt{8e^2 + 2d\sqrt{d^2 + 8e^2} - 2d^2}, \quad a = \sqrt{4e^2 + 2d\sqrt{d^2 + 8e^2} + 2d^2},$$

természetesen csak a pozitív négyzetgyököt véve.



2. ábra

Ha azt tesszük fel, hogy O a háromszögön kívül van (2. ábra) – vagyis, hogy az ACB szög tompaszög – és k sugarát erre az esetre r' -vel jelöljük, akkor a háromszögnek a tengelybe eső magassága $r' - d$, ezért (3) így módosul:

$$(3') \quad (r' - d)^2 = a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

(1) viszont nem változik meg. Célszerűbb azonban azt mondanunk, hogy d helyére (3)-ban és (1)-ben egyaránt $-d$ lépett. Így újabb számítás nélkül a mondott változtatással átvehetjük a fenti eredményeket:

$$(4') \quad r'^2 + dr' - 2e^2 = 0,$$

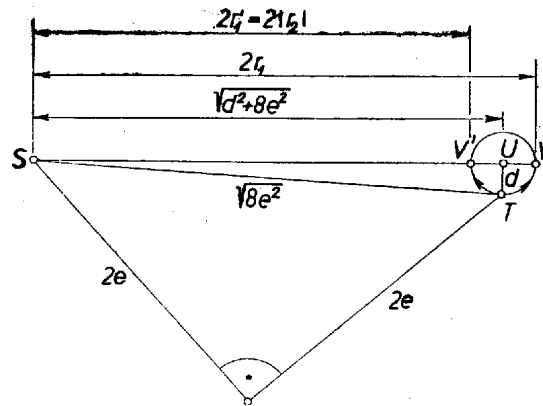
$$(5') \quad r'_1 = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 8e^2}}{2} \quad \text{és}$$

$$(6') \quad r'_2 = \frac{-d - \sqrt{d^2 + 8e^2}}{2}$$

Itt csak r'_1 pozitív, ezzel c és a -ra azokat a kifejezéseket kapjuk, amelyek (7)-ből d -nek $-d$ -vel való helyettesítésével állnak elő.

Lehetséges volna az is, hogy O a háromszög területén legyen, ti. ha $d = 0$. Ebből azonnal látható, hogy ABC derékszögű egyenlő szárú háromszög és $a = 2e$, $c = 2\sqrt{2}e$, ami (7)-ből is kiadódik.

A háromszög megszerkesztése végett célszerű előbb a k kört előállítanunk. Ugyanis a k -n tetszés szerint felvett C csúcsból kiindulva úgy kapjuk meg a szárak egyeneseit, hogy C -ből érintőket húzunk az O körül e sugárral írt k' körhöz; ezeknek k -val való második metszéspontja A , ill. B .



3. ábra

k átmérőjét (5), ill. (5') alapján a következő lépésekben szerkesztjük (3. ábra). $2e$ befogókkal egyenlő szárú derékszögű háromszöget szerkesztünk, ennek ST átfogójára fennáll $ST^2 = 8e^2$. ST és d befogókkal derékszögű háromszöget szerkesztünk, ennek SU átfogója egyenlő az (5) és (5')-beli gyökök kifejezéssel. Az SU egyenesre U -tól mindkét irányban felmérjük d -t, a végpontok V és V' , az utóbbi U -tól S felé. Ekkor k átmérője az SV , ill. SV' szakasz.

Ez a szerkesztés bármely d , e mellett egyértelműen végrehajtható, a fent mondott érintők szerkesztése azonban csak akkor, ha r nagyobbak adódik e -nél. Ez (5) esetében nyilván teljesül, (5')-re viszont csak akkor, ha

$$\begin{aligned} 2r'_1 &= -d + \sqrt{d^2 + 8e^2} > 2e, \\ d^2 + 8e^2 &> (d + 2e)^2 = d^2 + 4de + 4e^2, \\ 4e^2 &> 4de, \quad e > d. \end{aligned}$$

Ez a követelmény a 2. ábráról is leolvasható az O , D , E pontok helyzetéből. Eszerint $e > d$ esetén két megoldás van, $e \leq d$ esetén pedig egy.

Katona Éva (Budapest, Ybl M. ép. ip. t. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Vegyük észre, hogy r_2 , r'_2 abszolút értékben egyenlő r'_1 -gyel, ill. r_1 -gyel. Ez természetesen annak következménye, ahogyan (4')-t képeztük. Mondhatjuk ugyanis azt is, hogy (4') a (4)-ből úgy állt elő, hogy r helyére $r' = -r$ -et írtunk. Ez egyben azt is jelenti, hogy elég lett volna csak pl. (4)-et felírni és ezt mondani: d azt jelenti, hogy mennyivel van O az AB oldal „fölött”, r pedig azt, hogy mennyivel van följebb C , mint O . Negatív r azt jelenti, hogy C az O alatt van (2. ábra).

2. Több dolgozatban (1) és (2) mellett az ACD és OCE háromszögek hasonlóságából adódó

$$\frac{c}{2} : a = e : r$$

aránypár szerepel harmadik egyenletként. Szerzőik így látszólag megkerülték az O pont belső vagy külső helyzetének kérdését. Ebből az aránypár négyzetre emelésével és (1), (2) felhasználásával r^2 -re kaptak másodfokú egyenletet:

$$(8) \quad \begin{aligned} (r^2 - d^2) : (4r^2 - 4e^2) &= e^2 : r^2, \\ r^4 - (d^2 + 4e^2)r^2 + 4e^4 &= 0. \end{aligned}$$

Innen mind a számítás, mind a szerkesztés, mind a diskusszió jóval bonyolultabb a fent közölnél. Ennek az a magyarázata, hogy (8) bal oldalában (4) és (4') bal oldalának szorzata áll előttünk, ugyanis

$$r^4 - 4e^2r^2 + 4e^4 - d^2r^2 = (r^2 - 2e^2)^2 - d^2r^2 = (r^2 - 2e^2 - dr)(r^2 - 2e^2 + dr).$$

(8)-ből r^2 -re két pozitív gyököt kapunk, mert mind a diszkrimináns:

$$(d^2 + 4e^2)^2 - 16e^4 = d^2(d^2 + 8e^2),$$

mind a gyökök szorzata: $4e^4$, mind összegük: $d^2 + 4e^2$ pozitív. Ezekből négyzetgyökvonás útján kapjuk azt a két egyenlő abszolút értékű, ellentett előjelű gyökpárt, amelynek elemei fent külön választva adódtak.

II. megoldás: Legyen – az I. megoldás jelöléseivel – a k körön a C -vel átellenes pont C^* , és O vetülete AC^* -on F (1. és 2. ábra). Thalész tétele szerint $AC^* \perp AC$, így az $AEOF$ négyszög téglalap, köréje kör írható. E k^* kör középpontja az OA szakasz felezőpontja, ezért k^* átmegy a D talpponton is. Továbbá F felezi AC^* -ot, így $C^*F = FA = OE = e$ és $C^*A = 2e$.

Alkalmazzuk a körhöz külső pontból húzható szelők metszeteire vonatkozó tételt k^* -ra és C^* -ra

$$C^*O \cdot C^*D = C^*F \cdot C^*A,$$

vagyis az 1., ill. a 2. ábra eseteiben

$$(9) \quad r(r - d) = e \cdot 2e = 2e^2, \quad \text{ill.} \quad r(r + d) = 2e^2.$$

Ezzel megkaptuk az I. megoldás (4), ill. (4') egyenletét. Tovább ismét az I. megoldás szerint haladhatunk.

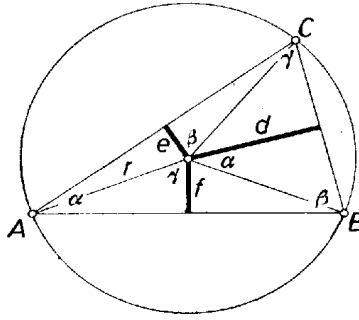
Gálfi László (Budapest, Fazekas M. gyak. gimn. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A 3. ábrát felére kicsinyítve (vagyis a befogókat e , e , majd $d/2$ -nek véve) a szerkesztést úgyis értelmezhetjük, mint a (9) egyenlet szerkesztéssel való olyan megoldását, amely a legutóbb idézett tételt használja fel. A (9) bal oldalán álló tényezők különbsége ismert szakasz: d , az egyik tényező pedig éppen az ismeretlen. Ezért olyan kört veszünk, melynek átmérője d , egyik szelőként pedig majd a külső pontot a középponttal összekötő egyenest. A külső pont helyzetét a jobb oldal alapján tűzzük ki: úgy, hogy a belőle húzott érintő egyenlő legyen a jobb oldali tényezők mértani közepányosával.

Klukovits Lajos (Szeged, Radnóti M. g. I. o. t.)

2. Az 1. megjegyzés gondolatát folytatva $e < d$ esetén r a következőképpen is szerkeszthető. Legyenek L , M , N egy egyenes olyan pontjai, amelyekre $LM = MN = e$, az MN alap fölé $d/2$ szárral szerkesztett egyenlő szárú háromszög harmadik csúcsa O , és messe az OL egyenest az O körül $d/2$ sugárral írt kör P és P' -ben. Ekkor r értéke LP , ill. LP' .

3. Egy tetszés szerinti háromszög szögei legyenek α , β , γ , a körülírt kör O középpontjának e szögekkel szemközti oldalaktól mért távolsága rendre d , e , f (4. ábra).



4. ábra

A középponti és kerületi szögekre vonatkozó összefüggésekből következik, hogy az O -ból az oldalakra bocsátott merőlegesek az oldal végpontjaihoz húzott sugarakkal rendre α , β , γ nagyságú szöveget zárnak be. Így

$$\cos \alpha = \frac{d}{r}, \quad \cos \beta = \frac{e}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{f}{r}.$$

Ez tompaszögű háromszögre is érvényes, ha abban az esetben, amikor az O pont és a háromszög valamelyik oldalnak ellenkező oldalára esnek, akkor az oldaltól mért távolságot negatívnak vesszük. Másrészt az $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ összefüggés folytán

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \cos^2 [180^\circ - (\beta + \gamma)] = [-\cos(\beta + \gamma)]^2 = \\ &= \cos^2 \beta \cos^2 \gamma + \sin^2 \beta \sin^2 \gamma - 2 \cos \beta \cos \gamma \sin \beta \sin \gamma = \\ &= \cos^2 \beta \cos^2 \gamma + (1 - \cos^2 \beta)(1 - \cos^2 \gamma) - 2 \cos \beta \cos \gamma \sin \beta \sin \gamma = \\ &= 1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \beta \cos \gamma (\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma) = \\ &= 1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \beta \cos \gamma (\beta + \gamma). \end{aligned}$$

Innen

$$1 - \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 0,$$

és ha $\beta = \gamma$, akkor a bal oldal szorzattá alakítható:

$$1 - \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos^2 \beta = (1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha - 2 \cos^2 \beta).$$

Valódi háromszög esetén $\alpha < 180^\circ$, s így $1 + \cos \alpha \neq 0$, tehát egyenlő szárú háromszögben, ha α a szárak közti szög,

$$1 - \cos \alpha - 2 \cos^2 \beta = 0.$$

Beírva a koszinuszok kifejezését d , e , f , r segítségével és a törteket eltávolítva tetszés szerinti háromszögre

$$r^3 - (d^2 + e^2 + f^2)r - 2def = 0,$$

egyenlő szárú háromszögre pedig

$$r^2 - dr - 2e^2 = 0$$

kell, hogy teljesüljön. Az utóbbi a fenti megoldásokban is szereplő egyenlet, az előbbi alapján pedig belátható, hogy általános háromszög esetén a kitűzött feladat megfelelője általában nem oldható meg a szokásos ún. eukleidészi körző-vonalzós szerkesztések segítségével.¹

A körzővel és vonalzóval végrehajtható szerkesztésekre vonatkozóan lásd lapunk egy korábbi cikkét: *Surányi János: A szögharmadolás kérdéséről*, Középisk. Matematikai Lapok XIV. (1957), 97–107. és 129–134. o.

¹Lásd *Szőkefalvi Nagy Gyula: Zwei nichtkonstruierbare Aufgaben des Dreiecks. Elemente der Mathematik*, 6 (1951), 81–83. o.