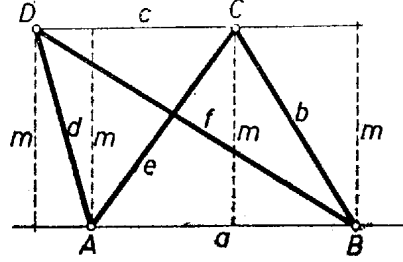


Legyenek az $ABCD$ trapéz ismeretlen párhuzamos oldalai $AB = a$ és $CD = c$, adott szárak $BC = b$ és $DA = d$, adott átlói $AC = e$, $BD = f$.



Az oldalak párhuzamossága egyenlőség alakjában azzal jellemezhető, hogy az ABC és ABD háromszögpárban a közös a alaphoz tartozó magasságok egyenlők. Ebből továbbmenve a területek is egyenlők. Ezt a Heron-képlettel kifejezve – annak beszorzással előálló

$$16t^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

alakjából, ahol a , b , c az oldalak – egyismeretlenes egyenletet kapunk a -ra (pontosabban: elsőfokú egyismeretlenes egyenletet a^2 -re):

$$16t^2 = 2(a^2b^2 + b^2e^2 + e^2a^2) - (a^4 + b^4 + e^4) = 2(a^2f^2 + f^2d^2 + d^2a^2) - (a^4 + f^4 + d^4).$$

Innen

$$(1) \quad \begin{aligned} a^2 &= \frac{(b^4 - 2b^2e^2 + e^4) - (f^4 - 2f^2d^2 + d^4)}{2(b^2 + e^2 - f^2 - d^2)} = \frac{(e^2 - b^2)^2 - (f^2 - d^2)^2}{2(b^2 + e^2 - f^2 - d^2)}, \\ a^2 &= \frac{(e^2 + f^2 - b^2 - d^2)(e^2 + d^2 - b^2 - f^2)}{2(e^2 + b^2 - f^2 - d^2)}. \end{aligned}$$

Ugyanezzel a megfontolással fejezhető ki c^2 az ACD és BCD háromszögek területének egyenlőségéből. Ekkor mindössze $c = CD$ és $a = AB$ szerepe cserélődik meg, c^2 keresett kifejezését tehát megkapjuk, ha A és D szerepét és egyidejűleg B és C -ét felcseréljük. Így

$$\begin{aligned} b = BC & \text{ helyére } CB = b \text{ lép,} \\ d = AD & \text{ ,, } DA = d \text{ ,,} \\ e = AC & \text{ ,, } DB = f \text{ ,,} \\ f = BD & \text{ ,, } CA = e \text{ ,,} \end{aligned}$$

tehát csak e és f cserélődik meg:

$$(2) \quad c^2 = \frac{(f^2 + e^2 - b^2 - d^2)(f^2 + d^2 - b^2 - e^2)}{2(f^2 + b^2 - e^2 - d^2)}$$

Vegyük észre, hogy (2) számlálójának 2-ik tényezője és nevezőjének betűs tényezője úgy is előáll, ha (1) megfelelő tényezőit felcseréljük, majd (-1) -gyel szorozzuk. Ez az észrevétel megkönnyíti a számítást. A két (-1) -gyel való szorzás természetesen el is maradhat. (Ugyanezen eredményre jutottunk volna az A , C és B , D betű-párok tagjainak kölcsönös felcserélésével is.)

A számításokban a két szár-adatot nyilván tetszés szerint oszthatjuk el b és d szerepére. Ez után e és f megválasztására 2 lehetőség látszik, de az egyikről a másikra való áttérés – vagyis e és f cseréje – mint láttuk – csupán felcseréli a -t c -vel.

A számpéldákban

I. $b = 60$, $d = 61$, $e = 100$, $f = 109$ -el $a = 80$ és $c = 91$; ez a trapéz derékszögű, $BC \perp AB$.

II. $b = 60$, $d = 109$, $e = 61$, $f = 100$ -zal $a = 11$ és $c = 80$. Ez a trapéz hurkolt, a B csúcsnál az ABC háromszögben kisebb szög adódik, mint ABD -ben.

III. $b = d = 25$, $e = f = 50$ -nel a és c kifejezése határozatlan, $0/0$ alakú.

IV. $b = d = 17$, $e = 25$, $f = 39$ -cel $a = c = 28$, ez a trapéz egyszersmind paralelogramma, mert párhuzamos oldalai egyenlők.

A III. példában mind a szárak, mind az átlók egyenlők, ezért a trapéz szimmetrikus. A határozatlanság magyarázata, hogy két adat: szár és átló nem határozza meg egyértelműen a szimmetrikus trapézt. Az ABC és ABD háromszögek mindegyikéből a háromszög-egyenlőtlenséggel $25 < a < 75$ adódik, e korlátok között választott bármely a -val az ABC és BAD háromszögek tükrösek AB felező merőlegesére, és így CD párhuzamos AB -vel.

A IV. példa is egyenlő szárú, de különböző átlójú trapéz. Ilyen minden ferdeszögű paralelogramma.

Megjegyzés. Az (1) és (2) eredmények teljes diszkusszióját mellőzve csak a következőkre mutatunk rá:

1. a háromszög-egyenlőtlenséget az átlók e_1, e_2, f_1, f_2 metszetei és a b, d szár által meghatározott két háromszögre alkalmazva, majd összeadással kapjuk, hogy konvex trapézban egyrészt $(e_1 - f_1) + (e_2 - f_2) = e - f < b + d$, másrészt $(e_1 + f_1) + (e_2 + f_2) = e + f > b + d$.

2. $b = d$ és $e \neq f$ esetén $a = c$, a négyszög paralelogramma.

3. $e = f$ és $b \neq d$ esetén $a = c$, a négyszög hurkolt, csúcsait az a, c oldalakkal és b, d átlókkal bíró paralelogramma csúcsai adják. (A 2. megállapítás szemléletesen is belátható: az AB és CD párhuzamos egyenesek távolságának bármely alkalmas $-b, d, e, f$ mindegyikénél kisebb – megválasztása esetén az egyenlő b, d szakaszpár egymáshoz képest kétféleképpen illeszthető AB és CD közé; ha nem párhuzamosak, akkor végpontjaik szimmetrikus trapézt alkotnak, de ezt $e \neq f$ kizárja; tehát párhuzamosak. Hasonlóan látható be a 3. is.)

4. Nincs megoldás, ha a és c nevezője 0. Ilyenkor $e > d$ esetén $e^2 - d^2 = f^2 - b^2 = g^2 (> 0)$, eszerint van olyan konvex trapéz, melynek magassága és egyik szára g , párhuzamos oldalai b és d , átlói e és f , és olyan konvex trapéz is, melyben g átló, e és f szarak.