

I. Vegyünk fel egy derékszöveget, rajzoljuk meg a szárait érintő, 50 mm sugarú kört, ennek azt az érintőjét, amely a szárakhoz 45° szöggel hajlik és amelynek a kör ugyanazon oldalán van, mint a derékszög csúcsa. Körünk a létrejött derékszögű egyenlő szárú háromszögnek beírt köre, kerülete $k = 100\pi \approx 314$ mm. A háromszög oldalait 0,5 mm pontossággal 170,5, 170,5 és 241,5 mm-nek találjuk, így kerülete $k_1 = 582,5$ mm, nem éri el $2k$ -t. (k_1 indexében – és később a szögekében is – a próbálkozás sorszámára utalunk.)

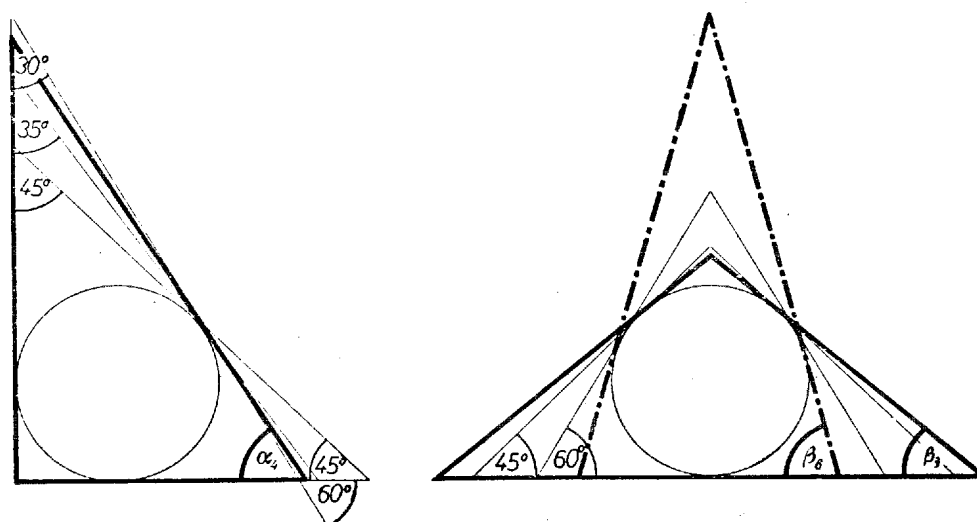
Tartsuk állandónak a derékszöveget és a kört, és próbálkozzunk más érintőkkel. Ezek helyzetét az előálló derékszögű háromszög nagyobb α hegyes szögével adjuk meg. Legyen $\alpha_2 = 60^\circ$, így a kerület: $k_2 \approx 136,5 + 236,5 + 273,0 = 646,0$ mm, nagyobb $2k$ -nál.

Fogadjuk el bizonyítást nélkül hogy α növelésével a fentihez hasonlóan szerkesztett derékszögű háromszög kerülete egyre nagyobbak adódik. Ez valószínű, ugyanis így csak a kisebb befogó válik kisebbé, és ez is mindig nagyobb marad a kör átmérőjénél, a nagyobb befogó viszont akármilyen nagyra lehet, az átfogó pedig még ennél is nagyobb. Eszerint 45° -ról 60° -ra áttérve már túlmertünk a kívánt tulajdonságú a szögön. – k_1 hiánya $2k$ -hoz képest $628,0 - 582,5 = 45,5$ mm, k_2 többlete pedig $646,0 - 628,0 = 18,0$ mm, kisebb a hiánynál. Ez arra mutat, hogy α -t 60° -hoz közelebb keressük.

$\alpha_3 \approx 55^\circ$ -kal $k_3 \approx 146,0 + 208,5 + 254,5 = 609,0$ mm, hiánya $2k$ -hoz képest 19,0 mm. k_2 és k_3 alapján úgy látszik, hogy 57° , vagy 58° lesz a keresett szög.

$\alpha_4 \approx 58^\circ$ -kal $k_4 \approx 140,0 + 224,5 + 264,5 = 629,0$ mm, $\alpha_5 \approx 57^\circ$ -kal pedig $k_5 \approx 142,0 + 219,0 + 261,0 = 622,0$ mm, ezek közrefogják $2k$ -t, a $k_4 - 2k$ eltérés 1,0 mm, a $2k - k_5$ eltérés pedig 6,0 mm.

Ezek szerint a kívánt tulajdonságú derékszögű háromszög hegyes szögei 58° és 32° .



II. Az előírt tulajdonságú egyenlő szárú háromszöveget keresve tartsuk ismét állandónak az alap egyenesét, és a beírt kört. Így a háromszögek tengelye is állandó, és elég a szár és az alap fele hosszát mérnünk, ennek k -val kell egyenlőnek lennie. A szár irányát az alappal bezárt β szögével adjuk meg, a megvizsgált háromszögek ezen szögét és félkerületét rendre $\beta_1, \beta_2, \dots, s_1, s_2, \dots$ -vel jelöljük.

Induljunk ki a szabályos háromszögből, tehát legyen $\beta_1 \approx 60^\circ$, így $s_1 \approx 173,0 + 86,5 = 219,5$ mm, kisebb k -nál. Hallottuk, hogy az ugyanakkora kerületű háromszögekbe írt körök közül a szabályos háromszögbe írt kör sugara a legnagyobb; valószínű ebből, hogy fordítva ugyanazon kör köré írt háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete a legkisebb. Eszerint β növelésével és csökkentésével egyaránt várható a háromszög kerületének növekedése, mert a nagyon „magas” és nagyon „lapos” háromszögek kerülete egyaránt nagyobb a szabályos háromszögénél. Mindkét irányban csak egy-egy megoldás várható.

$\beta_2 \approx 45^\circ$ esetére előbbi vizsgálatunkból $s_2 = k_1/2 \approx 291,0$ mm, ez valóban nagyobb s_1 -nél, de még kisebb k -nál. $\beta_3 \approx 40^\circ$ mellett $s_3 \approx 179,5 + 137,0 = 316,5$ mm, ez már kissé sok, $\beta_4 \approx 41^\circ$ mellett viszont $s_4 \approx 177,0 + 133,5 = 310,5$ mm hiányt mutat, és a $k - s_4 \approx 3,5$ mm hiány nagyobb az $s_3 - k \approx 2,5$ mm többletnél. Így $\beta \approx 40^\circ$ -kal megfelelő háromszöget kaptunk, szögei $40^\circ, 40^\circ, 100^\circ$.

Másrészt $\beta_5 \approx 70^\circ$ -kal $s_5 \approx 209,0 + 71,5 = 280,5$ mm, ami kevés, a $k - s_1 \approx 94,5$ mm hiány $k - s_5 \approx 33,5$ mm-re, közel harmadára csökkent, ezért β -t az előbbi $\beta_5 - \beta_1 = 10^\circ$ -nál kevesebbel növeljük. $\beta_6 \approx 75^\circ$ -kal $s_6 \approx 251,5 + 65,0 = 316,5$ mm, kissé sok, de már $\beta_7 \approx 74^\circ$ -kal $s_7 \approx 240,5 + 66,5 = 307,0$ kevés. A k -tól való eltérés s_6 -nál kisebb, így a második megfelelő háromszög szögei $75^\circ, 75^\circ, 30^\circ$.

Palánkai Gellért (Szeged, Radnóti M. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. Kevesebb méréssel érünk célt az I. részben, ha figyelembe vesszük, hogy a háromszög kerülete a csúcsokból a körhöz húzott c_1, c_2, r érintő szakaszokkal is kifejezhető, és így a követelmény

$$2c_1 + 2c_2 + 2r = 2k,$$

ahol c_1 és c_2 a hegyes szögek, r pedig a derékszög csúcsából húzott érintőszakasz hossza. Innen

$$c_1 + c_2 = c = k - r,$$

esetünkben $c = 264,0$ mm, vagyis csak az átfogó hosszát kell mérnünk. A megoldásként elfogadott $\alpha_4 \approx 58^\circ$ mellett $c_4 = 264,5$ -öt találtunk.

2. Ismeretes, hogy a háromszög területét a kerületnek és a beírt kör sugarának fél-szorzata is megadja, és hogy a körre nézve is $t = r^2\pi = 2r\pi \cdot r/2$. Eszerint mindegyik megoldásunkban a háromszög és a beírt kör területeinek aránya is 2-vel egyenlő. Valóban, körünk kétszeres területe közelítőleg $2 \cdot 5^2 \cdot 3,14 = 157 \text{ cm}^2$, kapott derékszögű háromszögünk területe a befogókból $14,0 \cdot 22,45/2 \approx 157,2 \text{ cm}^2$. A talált egyenlő szárú háromszögeink területe pedig, – miután a magasságot 115,0, ill. 243,0 mm-nek mértük:

$$13,7 \cdot 11,5 \approx 157,5 \text{ cm}^2, \quad \text{ill.} \quad 6,5 \cdot 24,3 \approx 157,9 \text{ cm}^2.$$

3. Számos dolgozat – bár arról a feladatban szó sem volt – szerkesztést kívánt bevinni a megoldásba és ezért az 564. gyakorlatban adott módon szerkesztett egy a kör kerületével közelítőleg egyenlő szakaszt. Erre nem volt szükség; nem a kör kerületét kellett mérni, ennek eredményében semmi új nem várható, hanem a más-más szögek esetében adódó háromszögek kerületét mint a szögek függvényét. Már pedig ha szögmérőt használunk, eljárásunk nem tekinthető eukleidészi szerkesztésnek.

4. Trigonometria ismeretek alapján a szögeket közelítőleg ki is lehet számítani.