

Ha x helyére 10-et, a, b, c, d, e helyére pedig számjegyeket írunk (vagyis a 0, 1, 2, ..., 8, 9 számokat), akkor az azonosság bal oldalán a tízes számrendszer legfeljebb 5 jeggyel írható $a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e = \overline{abcde}$ számát kapjuk. Másrészt így $11 = x + 1$, és ez a jobb oldal első négy tagjának osztója, mert

$$\begin{aligned}x^4 - 1 &= (x^2 + 1)(x^2 - 1) = [(x^2 + 1)(x - 1)](x + 1), \\x^3 + 1 &= (x^2 - x + 1)(x + 1), \\x^2 - 1 &= (x - 1)(x + 1).\end{aligned}$$

Ezért az $A, B, C, \dots$ betűkkel alkalmas egész számokat jelölve

$$10^4 = 11A + 1, \quad 10^3 = 11B - 1, \quad 10^2 = 11C + 1,$$

továbbá

$$10 = 11D - 1 \quad \text{és} \quad 1 = 11E + 1,$$

tehát

$$\begin{aligned}\overline{abcde} &= 11(Aa + Bb + Cc + Dd) + (a - b + c - d + e) \\&= 11F + [(e + c + a) - (d + b)] = 11F + r.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az $\overline{abcde}$ és r számok 11-gyel való osztásánál ugyanaz a maradék lép fel, hacsak r nem negatív; más szóval: $\overline{abcde} - r$ osztható 11-gyel. Pl. $62\,738$ és $r = (8 + 7 + 6) - (3 + 2) = 16$ osztásánál a maradék egyformán 5, mert $62\,738 = 5703 \cdot 11 + 5$ és $16 = 1 \cdot 11 + 5$. Ha az osztásból csak a maradékra van szükségünk, azt így jóval egyszerűbben megállapíthatjuk.

Ha r negatív, akkor helyette

$$\overline{abcde} = 11(F - 2) + (r + 22)$$

alapján a fenti állítást a $r + 22$ számról mondhatjuk ki, ez pedig pozitív. (Esetleg már $r + 11$ sem negatív.) Pl. $29\,180$ -nak „11-es maradéka” 8, mert $29\,180 = 2652 \cdot 11 + 8$ és az $r = (0 + 1 + 2) - (8 + 9) = -14$ helyett vett szám ugyancsak: $r + 22 = 8$.

Az eljárás 5-nél kevesebb jegyű számokra is alkalmazható, pl. az első példában kapott „16” számra $a = b = c = 0$ és $r = 6 - 1 = 5$.

Az eljárást ki lehet terjeszteni akárhány jegyű számokra. Mert a két egyenlő páratlan kitevős hatvány összegének, valamint a két egyenlő kitevős hatvány különbségének szorzattá alakításáról ismert azonosságok szerint

$$x^{2k+1} + 1 = (x^{2k} - x^{2k-1} + x^{2k-2} - \dots - x + 1)(x + 1)$$

és

$$\begin{aligned}x^{2k} - 1 &= (x^2)^k - 1 = [(x^2)^{k-1} + (x^2)^{k-2} + \dots + x^2 + 1](x^2 - 1) = \\&= [(x^{2k-2} + x^{2k-4} + \dots + x^2 + 1)(x - 1)](x + 1).\end{aligned}$$

Itt $x = 10$ -et írva látjuk, hogy

$$(1) \quad 10^{2k+1} = 11G - 1,$$

és

$$(2) \quad 10^{2k} = 11H + 1,$$

vagyis 10-nek minden (pozitív) páratlan kitevős hatványa 1-gyel kisebb, és minden (pozitív) páros kitevős hatványa 1-gyel nagyobb egy 11-gyel osztható számnál. Ebből az adott azonosság mintájára könnyű belátni, hogy minden n pozitív egész szám írható egy 11-gyel osztható pozitív szám és egy az n számjegyeiből egyszerűen képezhető r szám összegeként: $n = 11J + r$. Az r maradékot két összeg különbségként írhatjuk. A kisebbítendő tagjai az n -ben jobbról számítva páratlan sorszámú helyeken álló számjegyek, vagyis amelyeknek helyi értéke 10-nek páros kitevős hatványa (lásd a (2) alakot), – a kivonandó tagjai pedig n további, a páros sorszámú helyeken álló számjegyei, vagyis a 10^{2k+1} helyi értékűek (lásd az (1) alakot).

Ez azt jelenti, hogy bármely pozitív egész szám 11-es maradéka ugyanaz, mint az r szám 11-es maradéka, ha r nem negatív. Ha pedig r negatív, akkor r helyett bármely $r' = r + 11K$ alakú pozitív szám vehető.

A számok 11-es maradéka felhasználásával a „9-es próba” mintájára megadhatjuk a kívánt feltételeket és azokat együttesen „11-es próbának” nevezhetjük. A sokak előtt ismeretes, de többnyire hiányosan megfogalmazott 9-es próba a következőket mondja ki.

α) Egy szám 9-cel való osztásánál fellépő maradék – röviden: a szám 9-es maradéka – egyenlő a szám számjegyei összegének 9-es maradékával. Ennek esetleg ismételt alkalmazásával rövid úton megkaphatjuk az adott szám 9-cel való

osztásában fellépő *legkisebb nem-negatív* 9-es maradékát, pl. 878 kilences maradéka annyi, mint $8 + 7 + 8 = 23$ -é, ezé pedig annyi mint $2 + 3 = 5$ -é, vagyis 5; valóban, $878 = 97 \cdot 9 + 5$; szorosabb értelemben ezt szokás nevezni 9-es maradéknak.

β) Ahhoz, hogy adott számok összegére közölt szám helyes legyen, szükséges, hogy az „összeg” 9-es maradéka egyenlő legyen az összeadandók 9-es maradékaiból képezett összeg 9-es maradékával. (Vagyis ha a kívánt megegyezés nem teljesül, akkor az összegként közölt szám hibás, vagy pedig a „könnyebb” számításokban van hiba). A maradékok megegyezése viszont természetesen nem biztosítja a közölt eredmény helyességét, hiszen pl. egy számban két jegyet felcserélve általában más számot kapunk, de maradéka ugyanaz, – vagyis e feltétel szükséges, de nem elegendő.

γ) Hasonló a különbség és a szorzat helyességének feltétele. Nem lehet helyes a különbség, ha 9-es maradéka nem egyezik a tagjai 9-es maradékából (ugyanazon sorrendben) képezett különbséggel (ill. – ha ez negatívnak adódnék, a 9-cel nagyobb számmal). Nem lehet helyes a szorzat, ha 9-es maradéka nem egyezik a tényezői 9-es maradékából képezett szorzat 9-es maradékával.

δ) Mivel az osztást (teljes pontossággal) szorzással és összeadással ellenőrizzük: a q hányadost és r maradékot adó $a : b$ osztás akkor és csak akkor helyes, ha $qb + r = a$, azért a hányados és a maradék egyidejű helyességéhez szükséges, hogy a q és b 9-es maradékainak szorzatából és r -ből képezett összeg 9-es maradéka egyenlő legyen a 9-es maradékával.

ε) A 9-es próba az alapműveletek eredményének csupán számjegyeivel, vagyis „alaki értékekkel” foglalkozik, azért tizedes törtekkel végzett alapműveletek eredményének ellenőrzésére is használható.

E feltételek bizonyítására arra hivatkozunk, hogy ha az n szám 9-es maradéka r , akkor $n - r$ osztható 9-cel: $n - r = 9A$. Már pedig 9-cel osztható számok összege, különbsége, ugyancsak osztható 9-cel:

$$(n_1 - r_1) + (n_2 - r_2) + \dots + (n_k - r_k) = 9(A_1 + A_2 + \dots + A_k),$$

tehát valóban

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_k) - (r_1 + r_2 + \dots + r_k) = 9B;$$

és hasonlóan

$$(n_1 - r_1) - (n_2 - r_2) = (n_1 - n_2) - (r_1 - r_2) = 9(A_1 - A_2) = 9C.$$

Szorzásnál az $n = 9A + r$ alakból kiindulva

$$n_1 n_2 = (9A_1 + r_1)(9A_2 + r_2) = 9(A_1 r_2 + A_2 r_1 + 9A_1 A_2) + r_1 r_2,$$

így ismét

$$n_1 n_2 - r_1 r_2 = 9D,$$

és – a különbségre tett megállapítás megfordításával – ha egy különbség osztható 9-cel, akkor tagjainak 9-es maradéka egyenlő.

Nyilvánvaló, hogy amíg egész számokról van szó, a β)– δ) megállapítások változatlanul átvehetők a 11-es próba „használati utasításába”. A 11-es maradék megállapításában azonban a számjegyek helyi értéke is lényeges; pl. 420-nak és a belőle a tizedesvessző eltolásával adódott 42-nek 11-es maradékai különbözők: 2, ill. -2 , azaz 9, azért tizedes jegyeket is tartalmazó számokkal végzett műveletek ellenőrzéséhez további megfontolás szükséges. A példát folytatva 4200, 42 000, 420 000, ... 11-es maradéka váltakozva 9, 2, 9, ...-nek adódik. Kézenfekvő volna ennek alapján a 4,2, és 0,42 tizedes törtek 11-es maradékát is 2-nek, 9-nek venni, de a „szabályok” átírása hosszadalmas volna. Gyakorlatilag megfelelő, ha a műveletben megadott számokat $10^2 = 100$ olyan alkalmas hatványával szorozzuk, hogy egészek adódjanak és – osztásban – a hányados kiszámított része is egész legyen. Így ugyanis az osztási maradék is egész.

Megjegyzés. Tudatosítani kívánjuk olvasóinkban azt, hogy a fenti próbák alkalmazása minden esetre azt jelenti, hogy az alkalmazó még nem tekinti a szóban forgó műveletet befejezettnek. Ez a magyarázata annak, hogy egyesek „nem matematikai” szabálynak tekintik e próbákat. Valóban „a matematikában” a számítási eredményelv helyességét általában már feltételezik, ott már nem ez a kérdés; viszont eredménynek csak felelősséggel ellenőrzött adatot fogadunk el. Ámde az emberi élet semmiféle számszerű vonatkozása nem zárható ki a matematikából, vagyis a számítási folyamat kérdései sem. A fenti próbák sem a tapasztalatból adódtak, hanem az elmélet állapította meg azokat a gyakorlati számítás céljára.

Másrészt felhívjuk versenyzőinket, hogy minden számításukat valamilyen alkalmas módon ellenőrizzék. Sok elvben helyes dolgot a numerikus hibák rontanak el.