

**I. megoldás:** Olyan  $a, b, c, d$  számjegyeket keresünk, vagyis 0 és 9 közti egész számokat,<sup>1</sup> e két határt is megengedve, amelyekre

$$\begin{aligned} 1000a + 100b + 10c + d - (10a + b)(10c + d) &= \\ &= 1000d + 100c + 10b + a - (10d + c)(10b + a). \end{aligned}$$

A két oldal felcserélhetőségére tekintettel előírhatjuk, hogy  $a \leq d$  legyen, továbbá hogy  $a = d$  esetén  $b \leq c$  legyen. Így elébe vághatunk annak, hogy a megoldásokat kétszer kapjuk meg. Beszorzással, rendezéssel és osztással

$$(1) \quad 111(a - d) + 10(b - c) + 11(bd - ac) = 0.$$

Vegyük észre, hogy a bal oldali első két együttható egy-egy 11-gyel osztható szám szomszédja. Ennek alapján (1) így alakul:

$$(2) \quad 11[10(a - d) + (b - c) + bd - ac] = (d - a) + (b - c),$$

vagyis a jobb oldal osztható 11-gyel.

A jobb oldalon  $d - a$  nem lehet negatív, másrészt értéke legfeljebb 9 lehet:

$$0 \leq d - a \leq 9.$$

Hasonlóan

$$(3) \quad -9 \leq b - c \leq 9.$$

Ezekből összeadással (2) jobb oldalára a következő egyenlőtlenség adódik:

$$-9 \leq (d - a) + (b - c) \leq 18,$$

mivel pedig ez osztható 11-gyel, azért értéke csak 0, vagy 11 lehet. Eszerint – mindjárt átrendezve –

$$\begin{aligned} \text{vagy I.} \quad c - b &= d - a, \\ \text{vagy II.} \quad c - b &= d - a - 11. \end{aligned}$$

A  $bd - ac = (d - a)b - (c - b)a$  azonosság alapján (2) úgy alakítható, hogy mindegyik tagjában szerepel vagy  $a$   $d - a$ , vagy  $a$   $c - b$  különbség:

$$11[(b - 10)(d - a) - (a + 1)(c - b)] = (d - a) + (b - c).$$

Eszerint az I. esetben, 11-gyel mindjárt egyszerűsítve

$$[(b - 10) - (a + 1)](d - a) = (b - a - 11)(d - a) = 0,$$

ami csak  $d - a = 0$ , azaz  $d = a$ -val állhat, mert a  $b - a - 11 = 0$  egyenlet, jelöléseink értelmét tekintve, nem teljesülhet. Így egyszersmind  $c - b = 0$ , azaz  $c = b$ ; arra a semmitmondó eredményre jutottunk, hogy követelményünket minden *abba* alakú szám kielégíti.

A II. esetben hasonlóan járva el azt nyerjük, hogy

$$(b - a - 11)(d - a) + 11(a + 1) = 1,$$

vagy mivel a feltevés folytán  $b - a - 11 = c - d$ , azért

$$(4) \quad (d - c)(d - a) = 11a + 10.$$

Eszerint a jobb oldal értéke legalább 10, azaz pozitív, tehát  $d - a \geq 0$  folytán a bal oldal mindkét tényezője pozitív. Így  $a$  értéke legfeljebb 8, a jobb oldal értéke a

$$10, \quad 21, \quad 32, \quad 43, \quad 54, \quad 65, \quad 76, \quad 87$$

számok valamelyike, de csak olyan jöhet szóba, amely  $d - c$  és  $d - a$  céljára két 10-nél kisebb pozitív szám szorzatára bontható. Ezt 43, 65, 76 és 87 nem teljesítik. Nem felel meg  $54 = 6 \cdot 9$  sem, mert így  $a = 4$ , és a  $d - a = 6$ , vagy 9 követelésből  $d \geq 10$ , tehát nem lehet számjegy. Hasonlóan (4) jobb oldalát  $32 = 4 \cdot 8$ -nak véve  $a = 2$ , így csak  $d = 6$  felel meg, folytatólag azonban  $c = -2$  adódik. Ugyanígy negatív  $c$ -t ad  $21 = 3 \cdot 7$  és  $10 = 2 \cdot 5$  kisebb tényezőjének  $d - a$ -val való azonosítása is, így csak a következő két lehetőségünk marad:

<sup>1</sup>Tovább „egész szám” helyett csak „szám”-ot mondunk.

1) ha  $a = 1$ , (4) jobb oldala  $21 = 3 \cdot 7$ , és itt  $d - a = 7$  és  $d - c = 3$ -ból  $d = 8$ ,  $c = 5$ , végül  $b = 9$ , ezzel a példaként bemutatott 1958 számra jutottunk;

2) ha  $a = 0$ , (4) jobb oldala  $10 = 2 \cdot 5$ , és itt  $d - a = 5$ ,  $d - c = 2$ -ből  $d = 5$ ,  $c = 3$ ,  $b = 9$ . Így

$$0935 - 09 \cdot 35 = 5390 - 53 \cdot 90 (= 620),$$

de az előálló és így a szokáshoz képest felesleges 0 miatt ez is csak elfajult megoldásnak tekinthető.

*Tekulics Péter* (Szeged, Radnóti M. g. I. o. t.)

**II. megoldás:** Az (1) összefüggés  $b - c = x$ ,  $bd - ac = y$ ,  $d - a = e$  jelölésekkel így írható

$$(5) \quad 10x + 11y = 111e.$$

Tekintsük itt  $x$ ,  $y$ -t ismeretlennek,  $e$  számára pedig vegyük sorra figyelembe a 0, 1, 2, ..., 9 értéket.  $x$  értéke csak (3)-nak eleget tevő szám lehet. Ezt a megszorítást egyelőre figyelmen kívül hagyva minden  $e$  mellett megoldása az egyenletnek  $x_0 = -e$ ,  $y_0 = 11e$ . Ha  $x$ ,  $y$  egy másik egész megoldás, akkor

$$10x + 11y = 111e = 11(11e) - 10e.$$

Innen átrendezéssel

$$(6) \quad 10(x + e) = 11(11e - y).$$

A bal oldalt  $11(x + e) - (x + e)$  alakban írva nyilván csak úgy lehet 11-gyel osztható, ha  $x + e$  osztható 11-gyel:  $x + e = 11k$ , vagyis  $x = 11k - e$ . Ekkor (6)-ból  $y = 11e - 10k$  adódik.

A (3) egyenlőtlenség  $x$ -re csak  $k = 0$ -ra, továbbá  $e \geq 2$  esetén a  $k = 1$  érték mellett teljesül.

Ha  $k = 0$ , akkor  $b - c = x = -e$ -ből  $b = c - e$  és  $d - a = e$ -ből  $d = a + e$ . Így  $y = bd - ac = (c - a - e)e$ . Ezt  $y = 11e$ -vel egybevetve, ha  $e \neq 0$ , akkor a  $c - a = 11 + e \geq 12$  összefüggésre jutunk, amit számjegyek nem elégítenek ki. Ha pedig  $e = 0$ , akkor a  $b = c$ ,  $d = a$  feltételhez, tehát a nyilvánvalóan helyes abba alakú megoldásokhoz jutunk.

Ha  $k = 1$ , akkor  $x = -e + 11$ ,  $y = 11e - 10$ . Az előzőkhöz hasonlóan  $b = c - e + 11$  és az  $y = bd - ac = (c - e + 11)(a + e) - ac = (c - a - e)e + 11(a + e) = 11e - 10$  egybevetésből rendezés után

$$(7) \quad ec + (11 - e)a = e^2 - 10.$$

Itt a bal oldal nem lehet negatív, tehát csak  $e \geq 4$ -gyel várhatunk megoldást. Ezeket táblázatban adjuk meg:

| $e$ | így (7) alakja | megoldás                                                                                                        |
|-----|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4   | $4c + 7a = 6$  | nincs                                                                                                           |
| 5   | $5c + 6a = 15$ | $c = 3, \quad a = 0; \quad d = 5, \quad b = 9$                                                                  |
| 6   | $6c + 5a = 26$ | $c = 1, \quad a = 4; \quad d = 10$ -re vezet, nem megoldás                                                      |
| 7   | $7c + 4a = 39$ | $\begin{cases} c = 5 & a = 1, & d = 8, & b = 9 \\ c = 1, & a = 8; & d = 15 \end{cases}$ -re vezet, nem megoldás |
| 8   | $8c + 3a = 54$ | $c = 6, \quad a = 2; \quad d = 10$ -re vezet, nem megoldás                                                      |

Eszerint  $\overline{abcd} = 0935$ .

*Megjegyzések.* 1. A feladat kérdésére („Van-e...”) elegendő egyetlen példa közlésével ezt a választ adni: „van, és pedig..., mert...”. Ennek ellenére – igen helyesen – a legtöbb dolgozat hosszabb-rövidebb indokolás után ad választ. Adódott viszont olyan dolgozat, amely megindokolja, hogy „nincs az adotthoz hasonló tulajdonságú  $\overline{abcd}$  szám.”

2. Az (5)-höz hasonló,  $ax + by = c$  alakú egyenletek egész megoldásaira vonatkozóan lásd lapunk régebbi cikkét: *Surányi János*: Elsőfokú egyenletek egész megoldása (Diofantoszi egyenletek), K. M. L. VII. kötet (1953) 65–81. o.