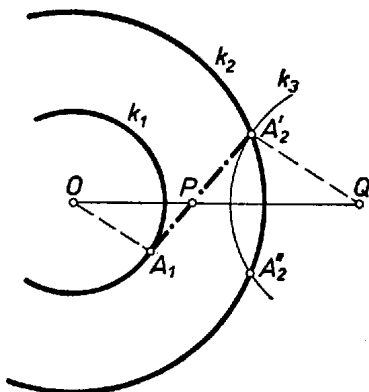


Legyen a gyűrűt határoló k_1 , k_2 körök közös középpontja O , sugaruk hossza r_1 , r_2 , és az adott pont P (OP az r_1 és r_2 közti távolság). Az $m : n$ arányt úgy tekintjük adotttnak, hogy adva vannak – pl. egy egyenesen a C kezdőpontból indulóan – a BC és CD szakaszok, amelyekre $BC : CD = m : n$.

Tekintsük a feladatot megoldottnak és legyenek a keresett húr végpontjai A_1 , A_2 , amelyekre $A_1P : PA_2 = m : n$ (ill. az I. osztályosok speciális esetében $A_1P = PA_2$, ilyenkor $m : n = 1$). Húzzunk A_2 -n át párhuzamost OA_1 -gyel és mossa ezt az OP egyenes Q -ban.



Így a PA_1O és PA_2Q háromszögek hasonlóak (a speciális esetben egybevágók), megfelelő oldalaik az adott arányban állnak, ezért $PQ = PO \cdot n/m$ és $QA_2 = OA_1 \cdot n/m$ (ill. $PQ = OP$ és $A_2Q = r_1$). Ezek alapján a szerkesztés a következő: megszerkesztjük PQ -t és QA_2 -t (pl. a C -n átmenő c egyenesre C -től felmérjük OP -t, OA_1 -et, a végpontjaikat B -vel összekötő egyenesekkel D -n átmenő párhuzamosokkal c -ből kivetsszük PQ , QA_2 egyik végpontját, másik végpontjuk C . PQ -t felmérjük OP -nek P -n túli meghosszabbítására, a kapott Q körül QA_2 sugárral írt k_3 körrel a k_2 -ből kivetsszük A_2 -t, végül az O -ból kiinduló, QA_2 -vel párhuzamos és ellentétes irányú félegyenessel k_1 -ből kivetsszük A_1 -et.

Q szerkesztése mindig egyértelműen végrehajtható, k_3 és k_2 kölcsönös helyzete szerint 2, 1, vagy 0 megoldás van. Ha 2 megoldás van, akkor ezek az OP tengelyre tükrösek. Ha pedig k_3 és k_2 érintkeznek, a megoldások száma 1. Lehetséges, hogy az A_1A_2 húr egy szakasza a kisebb kör belsejébe esik.

Minthogy a feladat nem írja elő, hogy az A_1A_2 húr melyik részének arányszáma legyen m , ill. n , azért a szerkesztést m és n szerepének felcserélésével is el kell végeznünk. A második szerkesztés megoldásainak száma független az elsőétől. (A megcserélés a speciális esetben természetesen elmarad.)

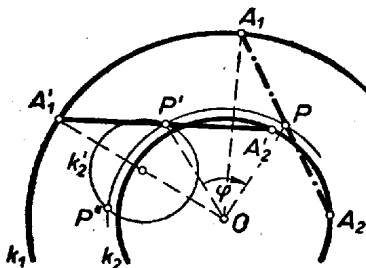
A szerkesztésben k_1 és k_2 szerepét természetesen felcserélhetjük.

Rajki Péter (Pécs, Nagy Lajos g. II. o. t.)

Megjegyzések: 1. Rövidebben azt is mondhatjuk, hogy k_3 -at a k_1 -ből $n : m$ arányú nyújtással és egyidejű P körüli 180° -os elforgatással kaptuk. (A speciális esetben pedig k_1 -nek P -re való tükrözésével; ekkor lényegében az OA_1A_2 háromszöget szerkesztjük meg r_1 , r_2 oldalaiból és a közös O végpontjukból kiinduló OP súlyvonalából.)

Rédei György (Kecskemét, Piarista g. II. o. t.)

2. Nyújtás (zsugorítás) és forgatás kombinálásával a speciális esetben a következő két észrevétel alapján is célhoz érünk: a) Ha P -t, A_1 -et és A_2 -t O körül valamilyen φ szöggel elforgatjuk, új P' , A'_1 , A'_2 helyzetükben a P' pontra adnak a többi követelményeknek megfelelő megoldást. b) Az $A_1P = PA_2$ -ből folyó $A_1A_2 = 2A_1P$ egyenlőséget úgy is értelmezhetjük, hogy P az A_2 -ből az A_1 középpontú, felére való zsugorítással keletkezett.



Képezzük most már egy a k_1 -en tetszés szerint vett A'_1 körüli félszeres zsugorítással k_2 -ből k'_2 -t és messük k'_2 -t az O körüli OP sugarú körrel, legyen az egyik metszéspont P' . Ekkor az A'_1P' félegyenesnek az az A'_2 pontja, amelyre $A'_1A'_2 = 2A'_1P'$, rajta van k_2 -n, tehát az A'_1 , P' , A'_2 ponthármas P' helyzetétől eltekintve megfelel a követelményeknek. Ezért A'_1 és A'_2 -t O körül a $P'OP$ szöggel A_1 , A_2 -be elforgatva megoldást kapunk.

Az általános esetben $1 : 2$ arányú zsugorítás helyett $m : (m + n)$ arányút használunk. (Ha a megoldás helyes voltát beláttuk, akkor A'_2 megszerkesztése mellőzhető, mert A_2 -t P és A_1 -ből is megkapjuk.)