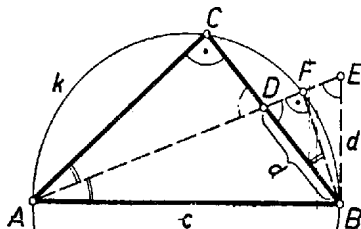


I. megoldás: Az állítás bizonyítására elég megmutatnunk, hogy a BDE háromszög két szöge, és pedig a D és E -nél levők, egyenlők. Valóban a csúcsszögek egyenlősége, az ACD és ABE háromszögek szögeinek összege, valamint a feltevések alapján

$$\begin{aligned} EDB\angle &= ADC\angle = 180^\circ - ACD\angle - CAD\angle = 180^\circ - ABE\angle - BAE\angle = \\ &= BEA\angle = BED\angle. \end{aligned}$$

A bebizonyított tétel szerint $BE = BD = d$. Ennek alapján c és d -ből megszerkesztjük az ABE derékszögű háromszöget, ennek AE átfogóján a B körül d sugárral írt körrel kimetsszük D -t, végül az AB átmérő fölötti k Thalész-kör és a BD egyenes második metszéspontjában megkapjuk C -t.



Az ABC háromszög megfelel a követelménynek, ugyanis derékszögű, és benne az $AE \equiv AD$ egyenes felezi a BAC szöget, mert

$$BAE\angle = 90^\circ - BED\angle = 90^\circ - BDE\angle = 90^\circ - CDA\angle = CAD\angle.$$

D akkor adódik az AE szakaszon, ha $d < c$. Ez a szerkeszthetőség egyetlen feltétele.

Porpáczy Erzsébet (Jászberény, lg. I. o. t.)

Megjegyzés: Az ABE háromszög megszerkesztése után C -t a k -ból az AB egyenesnek AE -re való tükröképével is kimetszhetjük. Ekkor $BAE\angle = EAC\angle$, és az ABC háromszög megfelelő voltának bizonyításához azt kell megmutatnunk, hogy teljesül a $BD = d$ követelmény, ami éppen a feladat állítása. A BAC szög akkor adódik hegyes szögnek, ha fele, a BAE szög kisebb 45° -nál, ennek feltétele, hogy $d < c$ legyen, mert így az ABE derékszögű háromszögben A -nál kisebb szög adódik, mint E -nél.

Kopcsányi Zsuzsa (Budapest, Berzsényi D. lg. II. o. t.)

II. megoldás: Megmutatjuk, hogy a BDE háromszögben a BF szögfelező (F az AD egyenesen) egyben magasság is; ebből már következik a bizonyítandó állítás. Valóban, a CBE és CAB szögek egyenlők, mert mindkettő pótszöge a CBA szögnek, így a felezésükkel kapott $CBF = DBF$ és CAD szögek is egyenlők. Egyenlők továbbá a BDF és ADC szögek is, mert csúcsszögek. Így a BFD és ACD háromszögek harmadik szögei is egyenlők: $BFD\angle = ACD\angle =$ derékszög, állításunknak megfelelően. Eszerint F rajta van k -n.

Fordítva: a B -ből az AD szögfelezőre bocsátott BF merőleges felezi a $DBE = CBE$ szöget, mert az egyenlő szárú háromszög szárszögének felezője azonos az ugyanazon csúcsból húzott magassággal. De közvetlenül is belátható: így ugyanis F szerkesztésnél fogva k -n van és felezi a CB ívet: $\widehat{CF} = \widehat{FB}$, mert a BAF és CAF szögek egyenlők. Ezért az ezen íveken fekvő CBF és FBE kerületi szögek egyenlők.

Ennek alapján az I. megoldásbeli szerkesztés helyességét így igazolhatjuk. BE a k -nak érintője, ezért a $BAD = BAF$ szög (ahol most F az AE és k metszéspontja) egyenlő a BF íven fekvő FBE „húr-érintő” szöggel. Ez segédtételünk megfordítása szerint egyenlő az $FBD = FBC$ szöggel, az utóbbi pedig az ugyancsak az FC íven fekvő $FAC = DAC$ szöggel.

Kiss Tünde (Tamási, Béri Balogh Á. g. II. o. t.)

III. megoldás: Az állítást a szögfelező osztási arányáról ismert tételből kiindulva is bizonyíthatjuk. Eszerint

$$BD : CD = BA : CA.$$

Másrészt a felezés és a merőleges szerkesztés folytán a BEA és CDA derékszögű háromszögek hasonlóak, ezért

$$BE : CD = BA : CA.$$

E két aránypár második arányai azonosak, ezért az első arányok is egyenlők:

$$BD : CD = BE : CD.$$

Ha pedig két egyenlő értékű arány utótagjai egyenlők, akkor az előtagok is egyenlők: $BD = BE$.

Kóta József (Tatabánya, Árpád g. II. o. t.)