

I. megoldás: Az egyenlet gyökei

$$x_1 = \frac{-\sqrt{17} + \sqrt{17 + 4\sqrt{18}}}{2\sqrt{3}}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{17} + \sqrt{17 + 4\sqrt{18}}}{2\sqrt{3}}.$$

A feladat az x_1 -hez, ill. x_2 -höz legközelebb eső, 3 tizedesjegyet tartalmazó x_1^* , ill. x_2^* szám megadását kívánja. Ezek legfeljebb 0,0005-del térhetnek el x_1 -től, ill. x_2 -től. Így a követelmény a következő két részre bontható: egyrészt x_1^* és x_2^* 3 tizedesjegyet tartalmaz, másrészt

$$x_1^* - 0,0005 \leq x_1 \leq x_1^* + 0,0005 \quad \text{és} \quad x_2^* - 0,0005 \leq x_2 \leq x_2^* + 0,0005.$$

A gyökök meghatározására több olyan műveletet kell végezni, aminek az eredménye általában nem adható meg tizedesjegyekben pontosan: négyzetgyökvonásokat, osztást. Mivel közelítő értéket 1-nél nagyobb számmal szorozva a hiba is szorozódik, így célszerű a gyökmennyiségek 1-nél nagyobb szorzóját bevinni a gyökjel alá. Másrészt célszerű a nevezőt gyökteleníteni, hogy kevesebb helyen kelljen közelítő értéket használni. Így

$$x_1 = \left(\sqrt{51 + \sqrt{2592}} - \sqrt{51} \right) / 6, \quad x_2 = - \left(\sqrt{51 + \sqrt{2592}} + \sqrt{51} \right) / 6.$$

Itt a 6-tal való osztás hatodára csökkenti a számlálóra kapott közelítő érték hibáját, viszont általában ez az osztás is csak közelítőleg végezhető el tizedestörtekkel. Belátható, hogy 1-nél nagyobb szám közelítő értékéből négyzetgyököt vonva – a gyök csökkenésével együtt – a hiba is csökken (viszont újabb hiba származhatik magából a négyzetgyökvonásból is).

Az osztás hibájára 0,0001-et hagyva, a számlálót elég $6 \cdot 0,0004 = 0,0024$ hibával megközelíteni. Ebből hagyjunk 0,001-et a második négyzetgyök közelítésére, akkor az első, bonyolultabb kifejezésben nem hibázhatunk többet 0,0014-nél. A bizonyítás nélkül tett megjegyzés szerint, ha itt az első négyzetgyökvonást 0,001-nél nem nagyobb hibával végezzük, akkor a második négyzetgyökvonást elég pontosan végezve biztosan belül maradunk a 0,0014 hibakorláton.

(A megjegyzések során még visszatérünk a következő kérdésre: az eddigi előírásokkal csak annyit sikerül elérnünk, hogy a kiszámított közelítő értékek hibája 0,0005 alatt maradjon, nem föltétlenül biztos azonban, hogy az így meghatározott korlátok közé eső közelítő értékek közt előfordul olyan is, amelyik felírható 3 tizedesjegy segítségével.)

A műveleteket a fenti terv szerinti pontossággal elvégezve ¹

$$\begin{aligned} 50,911 &\leq \sqrt{2592} = 50,912, \\ 10,095 &\leq \sqrt{101,911} \leq \sqrt{51 + \sqrt{2592}} \leq \sqrt{101,912} \leq 10,096, \\ 7,141 &\leq \sqrt{51} \leq 7,142. \end{aligned}$$

Így

$$0,4920 < \frac{2,953}{6} = \frac{10,095 - 7,142}{6} \leq x_1 \leq \frac{10,096 - 7,141}{6} = \frac{2,955}{6} = 0,4925$$

és

$$-2,873 = -\frac{17,238}{6} = -\frac{10,096 + 7,142}{6} \leq x_2 \leq \frac{10,095 + 7,141}{6} = -\frac{17,236}{6} < -2,8726.$$

A feladatnak megfelelő közelítő érték gyanánt tehát

$$x_1^* = 0,492 \quad \text{és} \quad x_2^* = -2,873$$

adódott, és a számítás azt is mutatja, hogy mindkettő kisebb a keresett gyöknél.

II. megoldás: Az előző megoldásban a kétszeres négyzetgyökvonás okozta a fő bonyodalmat. Ezt esetleg el tudjuk kerülni, ha sikerül a gyök alatti kifejezést egy olyannal helyettesíteni, amiben már nem kell gyökmennyiségből gyököt vonni.

A gyökök, amelyeket racionális értékkel akarunk megközelíteni:

$$x_1 = \frac{-\sqrt{17} + \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}}{2\sqrt{3}}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{17} + \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}}{2\sqrt{3}}.$$

Kísérreljük meg olyan pozitív racionális t és u szám keresését, amelyekkel fennáll

$$\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} = \sqrt{t} + \sqrt{u}.$$

¹ A következő egyenlőtlenségeket célszerű középtől kifelé olvasni, így jutunk az időben egymás után adódó számokhoz.

Innen

$$t + u = 17, \quad \sqrt{tu} = 6\sqrt{2}, \quad \text{azaz} \quad tu = 72.$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $t, u = 9, 8$, racionális értékek, s így a

$$\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{8}$$

összefüggést kaptuk. Ezt felhasználva az egyenlet gyökei – a számítások megkönnyítésére $\sqrt{3}$ -mal bővítve és gyök-mennyiségek szorzóit a gyökjel alá véve

$$x_1 = \frac{1}{6} \left(\sqrt{27} + \sqrt{24} - \sqrt{51} \right), \quad x_2 = -\frac{1}{6} \left(\sqrt{27} + \sqrt{24} + \sqrt{51} \right).$$

Itt, mint könnyen látható, az egyes gyökvonásokat 0,001-nél nem nagyobb hibával végezve a végeredmény hibája 0,0005-nél nem lesz nagyobb. Mivel

$$5,196 < \sqrt{27} < 5,197, \quad 4,898 < \sqrt{24} < 4,899, \quad 7,141 < \sqrt{51} < 7,142,$$

azért ismét a fenti x_1^*, x_2^* értékek adódnak.

Kóta József (Tatabánya, Árpád g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az első megoldásban utaltunk arra, hogy meggondolásaink nem biztosítják, hogy a közelítő értékre adódó szakaszba essék 3 tizedes jegyet tartalmazó közelítő érték. Valóban, ha pl. $\sqrt{51}$ két 0,001-del kisebb érték közt volna, akkor x_1 -re a $2,954/6 \leq x_1 \leq 2,956/6$ számköz adódnék, amelynek alsó határa 0,492 5 alatt van, felső határa fölötté, így számításaink nem döntenék el, hogy 0,492 vagy 0,493-e a keresett közelítő érték.

Azt nem is könnyű előre meghatározni, hogy hány tizedes jegyig kell számolni, hogy biztosan találjunk egy kellő számú tizedesjegyből álló közelítő értéket, hiszen ha esetünkben pl. x_1 nagyon kevéssel lenne 0,492 5 alatt, akkor annyi tizedesig kellene elvégezni a számítást, amíg már a felső határ 0,492 5 alá kerülne. Ehhez azonban 3-nál sokkal több tizedesjegy ismerete is szükséges lehet, és annak megállapításához, hogy hány tizedes jegyig kell számolni, már x_1 -nek egy jó közelítő értékét kellene ismerni.

2. Ugyancsak az I. megoldásban felmerült az a kérdés, hogy mit tudunk egy közelítő értékből négyzetgyökvonással nyert közelítő érték hibájáról. Legyen a gyökvonás alapja $a(> 0)$, közelítő értéke a' , legyen $|a - a'| = h$ és $|\sqrt{a} - \sqrt{a'}| = k$. (A második négyzetgyökvonásból eredő hibát, amit tetszés szerinti kicsivé tehetünk, most figyelmen kívül hagyjuk.) Innen négyzetre emeléssel a $k^2 = a + a' - 2\sqrt{aa'}$ érték nem negatív. Ha $a' \geq a$, akkor $a = -a + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{a'}$ alapján

$$0 \leq k^2 = a' - a + 2\sqrt{a} \left(\sqrt{a} - \sqrt{a'} \right) = h - 2\sqrt{a} k, \quad \text{tehát} \quad k \leq \frac{h}{2\sqrt{a}};$$

ha pedig $a' < a$, akkor hasonlóan

$$0 \leq a - a' + 2\sqrt{a'} \left(\sqrt{a'} - \sqrt{a} \right) = h - 2\sqrt{a'} k, \quad \text{tehát} \quad k \leq \frac{h}{2\sqrt{a'}}.$$

Ha a'' egy sem a -nál, sem a' -nél nem nagyobb érték, akkor $a' - a$ előjelétől függetlenül fennáll a $k \leq h / \left(2\sqrt{a''} \right)$ becslés.

A feladat esetében $a = 51 + \sqrt{2592} < 101$, s így választhatunk $2\sqrt{a''}$ helyett 20-at, ami azt mondja, hogy a külső négyzetgyök 0,001 hibával történő kiszámításához elég lett volna a belsőt 0,02-nél nem nagyobb hibával határozni meg, tehát bőségesen elég lett volna 2 tizedes pontosságig számítani ki, amit az olvasó utólag könnyen ellenőrizhet.