

Az értelmezés szerint az $a * b$ szám (bármely a, b számpárhoz) egyértelműen kiszámítható.

Az $a * x = c$ egyenlet a szokásos műveletek használatával így alakul

$$(1) \quad a + x + ax = c, \quad \text{azaz} \quad (a + 1)x = c - a.$$

Innen

$$(2) \quad x = \frac{c - a}{a + 1},$$

kivéve, ha $a + 1 = 0$. A kivett esetben $a = -1$, ekkor (1) nem oldható meg egyértelműen, ugyanis $c \neq a$ esetén nincs megoldás, $c = a = -1$ esetén pedig bármely x szám kielégíti (1)-et, ez esetben a $(-1) * x = -1$ egyenletet.

1. Az első bizonyítandó állítás az előbbi megoldás diszkussziójának speciális esete, ti. ha $c = 0$. Ugyanis az $a * x = 0$ egyenlet egyetlen megoldása (2) szerint

$$(3) \quad a' = \frac{-a}{a + 1}, \quad \text{ha} \quad a \neq -1;$$

$a = -1$ esetén viszont nincs megoldás, mert $c = 0 \neq a$. Tehát valóban soha sincs egynél több az $a * a' = 0$ egyenletet kielégítő szám.

2. Eszerint ha a' létezik, akkor a

$$(4) \quad (a')' = \frac{-a'}{a' + 1} = \frac{\frac{a}{a + 1}}{\frac{-a}{a + 1} + 1} = \frac{a}{-a + (a + 1)} = a,$$

amit bizonyítanunk kellett.

3. Az

$$(5) \quad (a * b)' = a' * b'$$

egyenlőség igazolása végett a bal és a jobb oldalt külön-külön kifejezzük a és b -vel (feltéve persze, hogy léteznek). A bal oldal

$$(6) \quad (a * b)' = (a + b + ab)' = \frac{-(a + b + ab)}{a + b + ab + 1} = \frac{-(a + b + ab)}{(a + 1)(b + 1)}$$

minden olyan esetben, ha a nevező nem 0, vagyis ha a is, b is -1 -től különböző szám. – (5) jobb oldala pedig, hacsak $a \neq -1$ és $b \neq -1$;

$$\begin{aligned} a' * b' &= \frac{-a}{a + 1} * \frac{-b}{b + 1} = \frac{-a}{a + 1} + \frac{-b}{b + 1} + \frac{ab}{(a + 1)(b + 1)} = \\ &= \frac{-a(b + 1) - b(a + 1) + ab}{(a + 1)(b + 1)} = \frac{-a - b - ab}{(a + 1)(b + 1)}. \end{aligned}$$

Ez értékében is, létezésének feltételeiben is megegyezik (6) jobb oldalával, tehát az (5) egyenlőség valóban fennáll.

4. és 5. helyessége az eddigiekből következik. Ugyanis (5)-öt előbb a helyett a' -re, majd a és b helyett a' és b' -re felírva és mindkétszer (4) figyelembe vételével valóban fennállnak:

$$(a' * b')' = (a')' * b' = a * b',$$

illetőleg

$$(a' * b')' = (a')' * (b')' = a * b.$$

Az $y = x' = \frac{-x}{x + 1}$ függvény képe az

$$y = \frac{-x - 1 + 1}{x + 1} = -1 + \frac{1}{x + 1}, \quad \text{ill.} \quad y + 1 = \frac{1}{x + 1}$$

átalakítás szerint az $y = 1/x$ függvényt ábrázoló hiperbolából úgy kapható, hogy azt balra és lefelé egy-egy egységgel eltoljuk. Ahogyan az utóbbi függvénynek $x = 0$ kivételével minden x -re van értelme, és értéke a 0-tól különböző szám, ugyanúgy az $y = x'$ függvénynek csak $x = -1$ -re nincs értelme és értéke mindenütt -1 -től különböző. A -1 szám semmilyen számnak sem vesszőse.

Megjegyzés. A csillag-műveletet értelmező egyenlőség mindkét oldalához 1-et adva

$$c + 1 = (a * b) + 1 = a + b + ab + 1 = (a + 1)(b + 1),$$

tehát az értelmezést így is írhatjuk

$$(a * b) + 1 = (a + 1)(b + 1) \quad \text{és} \quad a * b = (a + 1)(b + 1) - 1.$$

(Az 1 szám hozzáadása előtt $a * b$ -t félreértések elkerülésére zárójelbe tettük, mert előre nem adtunk megállapodást, hogy zárójel nélkül melyik művelet hajtandó végre előbb.) Ezek felhasználásával, ha már beláttuk, hogy az $a * x = c$, vagyis az $(a + 1)(x + 1) = c + 1$ egyenletet legfeljebb egy szám elégíti ki, az $(a')' = a$ egyenlőséget így is bizonyíthatjuk. Az $a * a' = 0$ egyenlet egyenértékű $(a + 1)(a' + 1) = 1$ -gyel, ami így is írható: $(a' + 1)(a + 1) = 1$. Ugyanígy az $a' * (a')' = 0$ egyenletből $(a' + 1)[(a')' + 1] = 1$. A két utóbbi egyenlőség egybevetésével $a + 1 = (a')' + 1$, és így $a = (a')'$.

Hasonlóan $a' + 1 = 1/(a + 1)$ alapján egyrészt

$$(a' * b') + 1 = (a' + 1)(b' + 1) = \frac{1}{a + 1} \cdot \frac{1}{b + 1} = \frac{1}{(a + 1)(b + 1)},$$

másrészt

$$(a * b)' + 1 = \frac{1}{(a * b) + 1} = \frac{1}{(a + 1)(b + 1)} = (a' * b') + 1,$$

tehát $(a * b)' = a' * b'$.

Simonovits Miklós (Budapest, Radnóti M. g. II. o. t.)