

I. megoldás: A feltevés szerint az

$$(5x + 7y) : m = (3x + 2y) : n$$

aránypár is helyes. E két arány közös értékét k -val jelölve

$$(1) \quad 5x + 7y = km, \quad 3x + 2y = kn.$$

Ez x, y meghatározására egyenletrendszer, megoldása:

$$x = k(7n - 2m)/11, \quad y = k(3m - 5n)/11,$$

és ezeket a kívánt arányba helyettesítve

$$\begin{aligned} \frac{13x + 16y}{2x + 5y} &= \frac{11(13x + 16y)}{11(2x + 5y)} = \frac{13k(7n - 2m) + 16k(3m - 5n)}{2k(7n - 2m) + 5k(3m - 5n)} = \\ &= \frac{22m + 11n}{11m - 11n} = \frac{2m + n}{m - n}. \end{aligned}$$

Wáczek Zsuzsa (Budapest, Szilágyi E. lg. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Lényegében így oldjuk meg a feladatot akkor is, ha $y \neq 0$ feltevés után az adott aránypár első két tagját y -nal osztjuk, az így a $z = x/y$ hányadosra adódott elsőfokú egyenletet megoldjuk és z -t behelyettesítjük a kérdéses arányból y -nal való egyszerűsítés útján kapott arányba.

És ezt csináljuk akkor is, ha az adott arányból pl. y -t m, n és x -szel kifejezve a kapott kifejezést helyettesítjük a kérdéses arányba és megállapítjuk, hogy a követelményt sikerült teljesíteni, mert x kiesik.

Molnár Katalin (Körmend, Kölcsey F. g. II. o. t.)

2. Itt x és fent k kiesése azon múlik – valamint az is, hogy az x/y hányadost kifejezhattük csak m és n -nel –, hogy az x -et és y -t tartalmazó arányokban nincs olyan tag, amely x és y mindegyikétől független. Ezt úgy szokás mondani, hogy az $5x + 7y$, $3x + 2y$, $13x + 16y$ és $2x + 5y$ kifejezések minden tagja x és y -ban egyenlő fokú, „homogén”.

3. Természetesen nem lehet $n = 0$, mert így az ismertnek tekintendő $m : n$ arálynak nem volna értelme; ugyanígy az adott aránypár második tagja: $3x + 2y$ sem lehet 0. Ennélfogva az sem lehet, hogy x és y értéke egyszerre 0 legyen, tehát a kérdéses arálynak mindig van értelme.

II. megoldás: Keressünk olyan λ, μ számokat, amelyekkel minden x, y számpárra fennáll: $\lambda(5x + 7y) + \mu(3x + 2y) = 13x + 16y$ (kivéve természetesen az $x = y = 0$ párt, amelyre az arálynak nincs értelme). Követelésünk teljesül, ha x és y két oldali együtthatói megegyeznek:

$$5\lambda + 3\mu = 13$$

$$7\lambda + 2\mu = 16.$$

Ebből az egyenletrendszerből $\lambda = 2$ és $\mu = 1$. – Hasonlóan, azt követelve, hogy $2x + 5y = \nu(5x + 7y) + \xi(3x + 2y)$ azonosság legyen, adódik: $\nu = 1$, $\xi = -1$.

Ezekből és (1) feltevésével

$$\begin{aligned} 13x + 16y &= \lambda km + \mu kn = k(2m + n), \\ 2x + 5y &= \nu km + \xi kn = k(m - n), \end{aligned}$$

ennélfogva

$$(13x + 16y) : (2x + 5y) = (2m + n) : (m - n).$$