

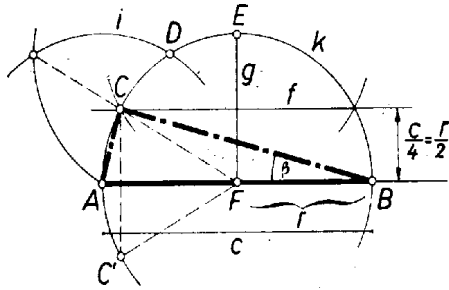
Előzetes megjegyzés. A mértani középre vonatkozó adat kézenfekvővé teszi a szerkesztésnek számítással való előkészítését. Igyekszünk azonban geometriai megfontolások révén minél kevesebb számolással célhoz érni.

I. megoldás: Az $AB = c$ átfogó ismeretében csak a derékszög C csúcsát kell megkapnunk. Erre egy mértani hely az AB átmérő fölötti Thalész-kör, a háromszög k körülírt köre. Az átfogó F felezőpontja egyben k középpontja, ezért a CF súlyvonal egyenlő k -nak r sugarával, az átfogó $c/2$ felével. Így a feltétel szerint

$$ab = (c/2)^2 = c^2/4.$$

A bal oldal a háromszög kétszeres területét jelenti, az pedig másképpen cm_c -vel egyenlő. Így $cm_c = c^2/4$ -ből $m_c = c/4 = r/2$.

Ennek alapján a háromszöget a következőképpen szerkeszthetjük meg: az $AB = 2r$ átfogó felett megrajzoljuk a k Thalész-kört (elég az AB egyik oldalán levő felét, így megválasztva, hogy C -t melyik oldalon kívánjuk), ebből az AB -re merőleges FE sugárral kimetsszük az AB fölött r magasságban fekvő E pontot; végül FE -nek f felező merőlegesével k -ból kimetsszük C -t. A két metszéspont AB -nek $FE = g$ felező merőlegesére tükrös, ezért az adódó két háromszög egybevágó.



1. ábra

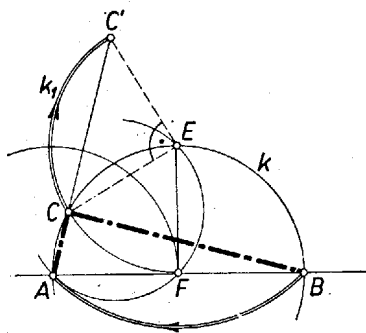
A nyert ABC háromszög megfelelő, mert derékszögű, továbbá c -re merőleges magassága $r/2 = c/4$, így kétszeres területe $c \cdot c/4 = c^2/4$, és ez egyenlő ab -vel. Innen a befogók mértani középárányosa: $\sqrt{ab} = c/2$, és ezzel teljesül a követelmény, mert a kérdéses súlyvonal hossza ugyancsak $c/2$.

A C csúcsot mint k és f metszéspontját E birtokában f megrajzolása nélkül is megszerkeszthetjük. Mivel ugyanis k egy F körüli körív, így az E körül r sugárral rajzolt ív éppen C -t és g -re vonatkozó tükröképét metszi ki k -ból.

Szekeres Veronika (Makó, József A. Gimn. I. o. t.)

Megjegyzés. Tudva, hogy $m_c = c/4 = r/2$, meghatározhatjuk és megszerkeszthetjük a háromszög β szögét is. Jelöljük C tükröképét AB -re C' -vel. Ekkor a CFC' háromszög minden oldala r hosszúságú, tehát $\angle CFC' = 60^\circ$, így $\angle AFC = 30^\circ$ és a BCF egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei, amelyek egyike β , 15° -osak. – Ennek alapján az $AB = c$ szakasz F felezőpontja körül, és A végpontja körül $r = c/2$ sugárral k , ill. i kört rajzolunk; legyen ezek egyik metszéspontja D . A D körül r sugárral rajzolt körívnek i -vel való (F -től különböző) metszéspontját F -fel összekötő egyenes metszi ki k -ból a keresett C csúcsot.

II. megoldás: Forgassuk el a feltételnek megfelelő ABC háromszög BC befogóját az AB átmérő fölötti, C -t tartalmazó k félkörív E felezőpontja körül 90° -kal (2. ábra).



2. ábra

Ekkor BC párhuzamos helyzetbe kerül AC -vel. B az elforgatáskor A -ba kerül, ezért C az AC egyenes egy C' pontjába kerül. Mivel a feladat feltétele szerint

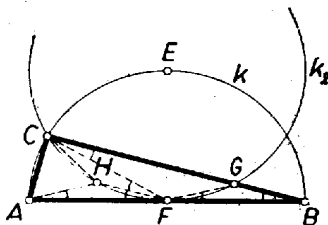
$$AC \cdot AC' = AC \cdot BC = (c/2)^2,$$

azért – annak a tételnek az alapján, hogy a körhöz egy külső pontból húzott szelőn keletkezett szakaszok mértani közepe egyenlő a pontból a körhöz húzható érintővel – az E pont körül C -n és C' -n át rajzolt k_1 körhöz A -ból húzható érintők hossza $c/2$. Tehát az érintési pontokat az A körül $c/2$ sugárral rajzolt kör és az AE mint átmérő fölé rajzolt kör metszéspontjai adják. Ezek egyike az AB szakasz F felezőpontja, ezért k_1 érinti F -ben AB -t, és így sugara $EF = c/2$. A C pontot tehát az E körül $c/2$ sugárral rajzolt kör metszi ki k -ből.

Az így szerkesztett C pont megfelel a feltételnek, mert a k_1 kör AC -vel való másik metszéspontját C' -vel jelölve $AC \cdot AC' = (c/2)^2$. Másrészt AC' az E körüli 90° -os elforgatással át vihető BC -be és így $AC \cdot BC = AC' \cdot AC' = (c/2)^2$.

Lakner József (Székesfehérvár, József A. g. II. o. t.)

III. megoldás: A szakaszok mértani közepére előbb idézett tétel szerint az AB -t F -ben érintő és C -n átmenő k_2 kör BC -t (mint szelőt) másodszor abban a (B és C közti) G pontjában metszi, amelyre $BG = BF^2/BC = c^2/4a = b = AC$ (3. ábra).



3. ábra

A BFG szög k_2 -nek FG ívén fekszik, ezért egyenlő az FCB szöggel, és mivel a BFC háromszög egyenlő szárú (a BF és FC oldalak k sugarai), azért egyszersmind $FBC \sphericalangle = \beta$ -val, tehát BFG egyenlő szárú háromszög, $GF = GB = b$. Legyen az F -en át BC -vel húzott párhuzamosnak k_2 -vel való második metszéspontja H . Ez a párhuzamos felezi az $AFC = 2\beta$ szöget (középponti szög a k kör AC ívén), mert a HFA szög egyállású $CBA \sphericalangle = \beta$ -val, ennél fogva felezi k_2 -nek az AFC szög szárai közötti FC ívét is. Így a HF , HC húrok egyenlők, és mivel a $GFHC$ idom húrtrapéz, azért $HF = CH = FG = b$. Ebből következik, hogy az AFH és FBG háromszögek egybevágók, mert két oldaluk és közbezárt szögük egyenlő, tehát $AH = FG = b$. Így pedig az ACH háromszög egyenlő oldalú, a HCA szög 60° . Ebből $HCG \sphericalangle = FGC \sphericalangle = AFC \sphericalangle = 30^\circ$, eszerint k_2 középpontjából az $FC = r = c/2$ húr 60° -os szögben látszik, így k_2 sugara egyenlő r -rel, tehát k_2 azonos az előző megoldásbeli k_1 -gyel.

IV. megoldás: Kiszámíthatjuk a befogókat is. Feltéhetjük, hogy $a > b$. Az $ab = c^2/4$ egyenlőséget az ismeretlen a , b -re egyenletnek tekintve és az $a^2 + b^2 = c^2$ püthagorászi egyenlőséggel összekapcsolva könnyen megoldható típusú egyenletrendszert kapunk. Az első egyenlet kétszeresét a másodikból kivonva, majd hozzáadva $a - b$ -re, ill. $a + b$ -re adódik egyenlet:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab &= (a - b)^2 = c^2 - c^2/2 = c^2/2, \\ a^2 + b^2 + 2ab &= (a + b)^2 = c^2 + c^2/2 = 3c^2/2, \end{aligned}$$

és innen, minthogy szakaszok pozitív különbségéről, ill. összegéről van szó:

$$a - b = c/\sqrt{2}, \quad a + b = c\sqrt{3}/\sqrt{2},$$

amik egyszerűen megszerkeszthető hosszúságok. Innen megkaphatjuk a -t vagy b -t; de $a - b$ -ből vagy $a + b$ -ből, továbbá a c oldalból és a vele szemben fekvő $\gamma = 90^\circ$ szögből a háromszög ismert módon közvetlenül is megszerkeszthető.

Windisch Ferenc (Budapest, József A. Gimn. II. o. t.)