

I. megoldás: Tegyük fel a feladat állításával ellentétben, hogy van olyan szomszédos természetes számokból álló pár, amelyek közül az első egy páros szám négyzete, a második egy négyzetszám 3-szorosa. Ezek $(2k)^2 = 4k^2$, illetőleg $3n^2$ alakban írhatók, tehát $4k^2 + 1 = 3n^2$. Itt a bal oldal páratlan, ezért a jobb oldal is, tehát $n = 2m + 1$. Ezzel feltevésünk a $4k^2 + 1 = 3(4m^2 + 4m + 1) = 4(3m^2 + 3m) + 3$ alakot veszi fel, ami nyilván lehetetlen, mert 4-gyel osztva a bal oldal maradéka 1, a jobb oldalé 3. Eszerint feltevésünk helytelen, az állítás első része igaz.

Hasonlóan nem állhat fenn az $r^2 + 1 = 7s^2$ egyenlőség sem, mert s -nek páros r mellett páratlannak kell lennie, páratlan r mellett pedig párosnak és ezek mindegyikéből ellentmondásra jutunk, ismét a 4-gyel való oszthatóság szempontjából, mert egyrészt

$$(2k)^2 + 1 = 4k^2 + 1 \quad \text{és} \quad 7(2m + 1)^2 = 4(7m^2 + 7m + 1) + 3,$$

másképp

$$(2k + 1)^2 + 1 = 4(k^2 + k) + 2 \quad \text{és} \quad 7(2m)^2 = 4(7m^2) + 0.$$

Kászonyi László (Szombathely, Nagy Lajos g. I. o. t.)

II. megoldás: Az állításnál több is igaz: egy természetes szám négyzetére következő szám sem lehet semmiféle természetes számnak a 3-szorosa. Ugyanis minden természetes szám vagy $3k$, vagy $3k + 1$, vagy $3k + 2$ alakban írható, ezért négyzete vagy $3(3k^2)$, vagy $3(3k^2 + 2k) + 1$, vagy $3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ alakú, így a rákövetkező szám az első esetben $3m + 1$, a további kettőben $3m + 2$ alakú, tehát nem többszöröse 3-nak.

Hasonlóan a 7-tel való oszthatóság szempontjából minden szám a következő alakok egyikében írható:

$$7k, \quad 7k \pm 1, \quad 7k \pm 2, \quad 7k \pm 3,$$

tehát a négyzetére következő szám

$$7(7k^2) + 1, \quad 7(7k^2 \pm 2k) + 2, \quad 7(7k^2 \pm 4k) + 5, \quad 7(7k^2 \pm 6k + 1) + 3$$

alakú, eszerint nem lehet semmilyen egész számnak 7-szerese, többek között négyzetszámnak sem.

Ámon Magdolna (Győr, Zrínyi Ilona lg. I. o. t.)