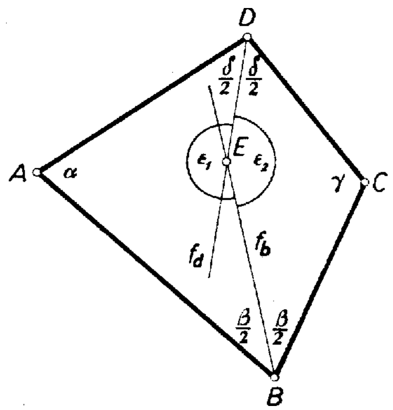
I. megoldás: Tegyük fel, hogy az adott szögek közül α kisebb: $\alpha < \gamma$, továbbá, hogy a vizsgálandó f_b és f_d szögfelezők a négyszög belsejében metszik egymást, metszéspontjuk E (1. ábra).



1. ábra

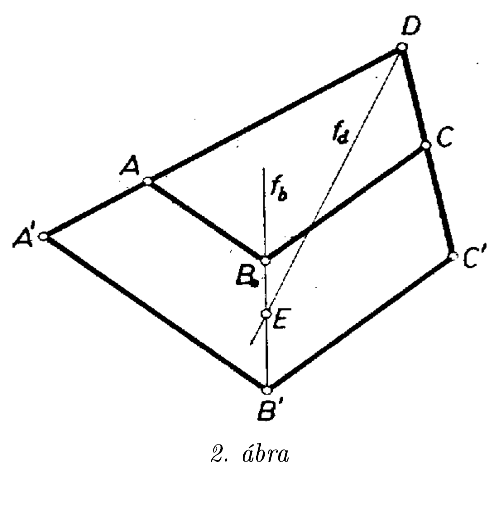
Így a BE, DE szakaszok az $ABCD$ négyszöget az $EDAB$ és $EDCB$ négyszögekre vágják szét. Az E csúcsnál az $EDAB$ négyszögben $\varepsilon_1 = 360^\circ - \alpha - (\beta+\delta)/2$ nagyságú szög van, az $EDCB$-ben pedig $\varepsilon_2 = 360^\circ - \gamma - (\beta+\delta)/2$ nagyságú. Ezek csak az α, ill. γ kivonandóban térnek el, így a feltevésnél fogva $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Másrészt $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 360^\circ$, tehát $\varepsilon_1 > 180^\circ$, $\varepsilon_2 < 180^\circ$, vagyis ε_1 az E pontnál keletkező négy szög közül háromnak az összegét adja, ε_2 pedig egy olyan szög nagyságát, amelynek terében nincs félegyenese a szögfelezőknek.

Megmutatjuk, hogy ε_2 tompaszög, így a szögfelezők előírt hegyes szögeként kiegészítő szöge, $\zeta = 180^\circ - \varepsilon_2$ veendő. Ugyanis $\beta + \delta = 360^\circ - (\alpha+\gamma)$ alapján

$$\varepsilon_2 = 360^\circ - \gamma - \frac{\beta+\delta}{2} = 360^\circ - \gamma - 180^\circ + \frac{\alpha+\gamma}{2} = 180^\circ - \frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

Négyszögünk konvexsége folytán γ és α kisebbek 180°-nál, ugyanez áll különbségükre, így annak fele, ε_2 utolsó alakjának kivonandója kisebb 90°-nál, ennélfogva ε_2 valóban nagyobb 90°-nál. Eszerint a kérdéses hegyes szög: $\zeta = (\gamma - \alpha)/2$.

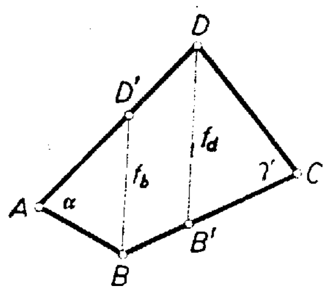
Az olyan eseteket, amelyekben f_b és f_d-nek E metszéspontja a négyszög kerületére, vagy a négyszögön kívülre esik, visszavezetjük a már vizsgált esetre. A négyszög kerületére csak úgy eshet E, ha vagy B-be, vagy D-be esik, mert a BA, BC egyeneseken f_b-nek nincs más pontja, mint B, a DA, DC egyeneseken pedig f_d-nek nincs más pontja, mint D. Legyen E a B-ben, ill. f_b-nek kifelé való meghosszabbításán (2. ábra).



2. ábra

Ekkor az f_b-nek a négyszögből kilépő meghosszabbításán, E-n túl felvett B' ponton át BA, BC-vel párhuzamost húzva, és ezeknek DA, DC-vel való metszéspontját A', C'-vel jelölve az $A'B'C'D'$ négyszög B' és D-nél fekvő szögeinek felezői f_b és f_d, és ezek az új négyszögön belül metszik egymást. Ezért fenti eredményünk szerint $\zeta = (\gamma' - \alpha')/2$ és ez egyenlő $(\gamma - \alpha)/2$-vel, mert az $A'B'C'D$ és $ABCD$ négyszögek egymás utáni szögei egyállásúak, és ezért egyenlők.

A kérdéses szög nem létezik, ha f_b és f_d párhuzamosok vagy egybeesők. Ez csak akkor áll fenn, ha $\alpha = \gamma$. Messe ugyanis f_b, f_d az AD, ill. BC egyenest D', ill. B'-ben (3. ábra).

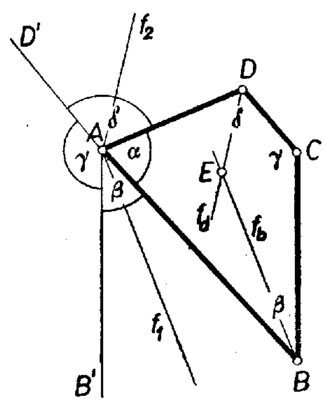


3. ábra

f_b és f_d azonossága esetén $D' \equiv D$, $B' \equiv B$ és az $ABCD$ négyszög deltoid, mert a felezések folytán BA és BC, valamint DA és DC egymás tükrös párjai f_b-re, és ezért $\alpha = \gamma$. Különben pedig $CB'D\sphericalangle = CBD'\sphericalangle = \beta/2$ és $AD'B\sphericalangle = ADB'\sphericalangle = \delta/2$, mert egyállású szögek, vagyis a $B'CD$ és BAD' háromszögek $2-2$ szöge egyenlő, ezért harmadik szögeik is, amint állítottuk. Fordítva, $\alpha = \delta$-ból következik, hogy f_b és f_d egybeesők vagy párhuzamosak. – A kapott feltétel ellentétben áll a fenti ζ megállapításában felhasznált $\alpha < \gamma$ feltevéssel, ezért a nyert ζ érték itt nem használható. De a fenti értéknek $\alpha = \gamma$ esetére való felhasználása sem vezet hibára, mert $\zeta = 0°$-ot ad, amit úgysem fogadunk el két egyenes hajlásszögének.

Góth László (Budapest, Könyves Kálmán g. II. o. t.)

II. megoldás: Nincs szükség eseteknek E helyzete szerinti megkülönböztetésére, ha a szöget nem kötjük helyhez, hanem csupán irányok közti elfordulásnak tekintjük. Toljuk el a CB, CD félegyeneseket C-pontnál fogva A-ba, új helyzetük $AB'(\|CB)$ $AD'(\|CD$; 4. ábra).



4. ábra

Ekkor az (egyenes szögnél kisebb) $B'AD'$ szög a $BCD = \gamma$ szöggel egyenlő, mert egyállásúak, és BAB' az $ABC = \beta$-val, DAD' az $ADC = \delta$-val egyeulő, mert váltószögek, tehát az A pontnál megjelent négyszögünknek mind a négy szöge. Legyen továbbá f_1, f_2 az f_b, f_d szögfelezőkkel az A-n át húzott párhuzamosoknak az a félegyenese, amely az egyenes szögnél kisebb $B'AB$, ill. DAD' szög terében fekszik. Az f_b és f_d közti, keresett szögek egyenlők az f_1 és f_2 közti szögekkel. Ez utóbbiak pedig felezik a $B'AB$, DAD' szöget, mert pl. f_1 és AB szöge váltószöge f_b és BA szögének, amely $\beta/2$-vel egyenlő. Már most f_1-ből f_2-be átfordulva egyik irányban $\vartheta_1 = \beta/ + \alpha + \delta/2 = \alpha + (\beta+\delta)/2$ szög van, a másik irányban $\vartheta_2 = \beta/2 + \gamma + \delta/2 = \gamma + (\beta+\delta)/2$. Továbbá $\alpha = \gamma$ esetén $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 360°/2 = 180°$, vagyis f_1 és f_2 egymás meghosszabbításai, tehát f_b, f_d párhuzamosak, vagy egybeesők, $\alpha < \gamma$ esetén pedig $\vartheta_1 < \vartheta_2$ tehát f_1 és f_2-nek ϑ_1 a szokásos értelemben vett hajlásszöge. Ez $(\alpha+\beta+\delta)/2 + \alpha/2 = 180° - \gamma/2 + \alpha/2$ alakban is írható, és arról a fentiek szerint látjuk be, hogy tompaszög, számunkra kiegészítő szöge veendő, $\zeta = 180° - \vartheta_1 = (\gamma - \alpha)/2$.

Bácskai Ferenc (Kecskemét, Piarista g. II. o. t.)

Megjegyzés. Teljeseknek csak azokat a dolgozatokat fogadtuk el, amelyekben legalább utalás van arra, hogy a szögfelezők a négyszögön kívül is metszhetik egymást, vagy arra, hogy α és γ nagyságviszonya hogyan befolyásolja a végeredményt. Amely dolgozatok egyik kérdést sem érintették, azokat hiányosaknak minősítettük.