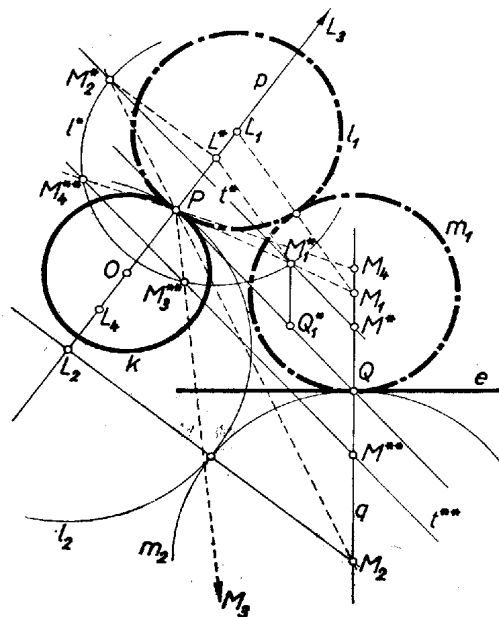


I. megoldás: Tekintsük a feladatot megoldottnak és legyen a keresett l_1 , m_1 kör középpontja L_1 , M_1 (a P -t k -nak O középpontjával összekötő p egyenesen, ill. az e -re Q -ban emelt q merőlegesen) és közös sugaruk r . A két kör – sugaraik egyenlősége folytán – csak külső érintkezésben lehet egymással, ezért $L_1M_1 = 2r$.



1. ábra

Így a PQM_1L_1 négyszögben ismerjük a PQ oldalt, a P és Q -nál fekvő szögeket és a többi három oldal arányát: $PL_1 : L_1M_1 : M_1Q = 1 : 2 : 1$. A szögek és az arány alapján e négyszöghöz szerkeszthetünk hasonlót, úgy hogy p -re P -től és q -ra Q -tól felmérjük a tetszés szerinti $PL^* = QM^* = d$ szakaszt, az M^* -on át PQ -val húzott t^* párhuzamost elmetsszük az L^* körül $2d$ sugárral írt l^* -körrel, a kapott M_1^* metszésponton át párhuzamost húzunk q -val, és vesszük ennek PQ -val való Q_1^* metszéspontját. Így a $PQ_1^*M_1^*L^*$ négyszög hasonló helyzetű PQM_1L_1 -hez, ennél fogva M_1 -et q -ból PM_1^* -gyel metszhetjük ki, L_1 -et pedig p -ből a $Q_1^*L^*$ -gal Q -n át húzott párhuzamossal.

Valóban, a PQM_1 és $PQ_1^*M_1^*$, valamint a PQL_1 és $PQ_1^*L^*$ háromszögpárok hasonlóságából $QM_1 : Q_1^*M_1^* = PQ : PQ_1^* = PL_1 : PL^*$, ezért $Q_1^*M_1^* = QM^* = PL^*$ folytán $QM_1 = PL_1 = r$; másrészt $PM_1 : PM_1^* = QM_1 : Q_1^*M_1^* = r : d = PL_1 : PL^*$, így a PM_1L_1 és $PM_1^*L^*$ háromszögek hasonlóak, és $L^*M_1^* = 2d$ folytán $L_1M_1 = 2r$, tehát az L_1 , M_1 pontok körül r sugárral írt l_1 , m_1 körök érintik egymást, továbbá a P -n, ill. Q -n át p -re, q -ra merőleges egyenest és evvel k -t, ill. e -t.

l^* és t^* kölcsönös helyzete szerint M_1^* -ként 2, 1, 0 pontot és ugyanennyi megoldást kapunk. PL^* és QM^* egyikének irányát ellentétesre fordítva ugyanezen eljárással ismét legfeljebb 2 megoldás adódik, így a megfelelő körpárok száma általában legfeljebb 4. (Az ábrán $QM^{**} = QM^*$, a megfelelő t^{**} -ből adódó L_4 , M_4 középpontok is fel vannak tüntetve.) Könnyen belátható, hogy ha p és q párhuzamosak, akkor a megoldások száma 3. Nincs megoldás, vagy végtelen sok megoldás van, ha P és Q egybeesnek, aszerint, hogy k metszi e -t vagy érinti.

Fekete Béla (Debrecen, Református g. II. o. t.)

Megjegyzés. A szerkesztés *végrehajtásában* Q_1^* -et mellőzhetjük, mert (a bizonyítás szerint) L_1 az $M_1^*L^*$ -gal M_1 -en át húzott párhuzamossal is kimetszhető, vagy kitűzhető $PL_1 = QM_1$ alapján, figyelembe véve, hogy PL_1 iránya aszerint egyező, ill. ellentétes PL^* -ével, amint PM_1^* és PM_1 irányai megegyeznek, ill. ellentétesek.

II. megoldás: Legyen a k kör P -beli érintőjének e -vel való metszéspontja R , a keresett körök érintkezési pontja (az első körpárra) T_1 és RT_1 -nek a körökkel való második metszéspontja S' , S'' ; ekkor a sugarak egyenlősége folytán $T_1S' = T_1S''$.

