

a) Az egyenletben x nem lehet negatív, mert akkor $\sqrt{x}$ nem valós, $-$ és 0 sem lehet, mert akkor a kitevőkben 0^0 állna, márpedig a 0 kitevős hatvány csak 0 -tól különböző alapokra van értelmezve. Ezek szerint $x > 0$. – Másrészt látjuk, hogy $x = 1$ megoldása az egyenletnek (mindkét oldal értéke 1), ezért a további esetleges gyökök keresésében feltehetjük, hogy $x \neq 1$. – A két oldali alapok egyezése folytán a hatványok csak úgy lehetnek egyenlők, ha a kitevők egyenlők: $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$. A nem negatív x -ekre érvényes $x = (\sqrt{x})^2$ azonosság alapján a bal oldalt átalakítva: $\sqrt{x}^{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$. Mivel $\sqrt{x} \neq 1$, azért a fenti gondolatot újra alkalmazva $2\sqrt{x} = x$. Innen $4x = x^2$ és az egyenletet $x = 4$ -en kívül más pozitív szám nem elégítheti ki. Ezzel a bal oldali kitevő $4^{\sqrt{4}} = 16$, a jobb oldali: $2^4 = 16$, tehát $x = 4$ is gyök (mindkét oldal értéke $4\ 294\ 967\ 296$).

b) Az egyenletrendszer második egyenletének (amelyben nyilván $b > 0$ és $b \neq 1$) csak akkor van értelme, ha x, y pozitívok; innen $y = x^m$. Az y kiküszöbölésével $x^m = mx$, $x^{m-1} = m$, végül

$$(1) \quad x = {}^{m-1}\sqrt{m} = m^{\frac{1}{m-1}}, \quad y = m^{{}^{m-1}\sqrt{m}} = m^{\frac{m}{m-1}}.$$

Az itt kijelölt gyökvonásnak nincs értelme, ha $m - 1 = 0$, azaz $m = 1$. Mégsem mondjuk, hogy nincs megoldás, mert ekkor mindkét egyenlet szerint $y = x$, ezt minden egyenlő pozitív számokból álló számpár kielégíti. *Egyértelmű* megoldás valóban nincs. – Nincs értelme (1)-nek $m = 0$ esetén sem, mert 0^{-1} nincs értelmezve (0 -nak csak pozitív kitevős hatványai vannak értelmezve). Végül $x > 0$, $y > 0$ -ból és az első egyenletből $m = y/x$ folytán $m < 0$ mellett sincs megoldás. – Mindezek szerint (1) akkor megoldása az adott egyenletrendszernek, ha b és m az 1 -től különböző pozitív számok.

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az *a*) egyenlet $x = 1$ gyökét „számító” úton a két oldal logaritmusának egyenlőségéből kaphatjuk: $x^{\sqrt{x}} \lg x = \sqrt{x}^x \lg x$ -ből $(x^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}^x) \lg x = 0$ teljesül, ha $\lg x = 0$, azaz $x = 1$.

2. Célszerű a megoldást néhány numerikus m mellett is ellenőrizni; legyen mindvégig $b = 10$. Pl. $m = 2$ -vel: $x = 2$, $y = 4$; $m = 3$ -mal: $x = \sqrt{3}$, $y = 3\sqrt{3}$; $m = 10$ esetén $x = \sqrt[9]{10} = 1,292$, $y = 12,92$; $m = 1/2$ mellett $m - 1 = -1/2$, $1/(m - 1) = -2$, $x = (1/2)^{-2} = 2^2 = 4$, $y = 2$, vagyis $m = 2$ -hez képest x és y felcserélődtek, ami az első egyenlet alapján „szinte várható”. Ugyanezt találjuk $m = 1/3$, $m = 1/10$ esetén is. m helyett $1/\mu$ -vel $1/(m - 1)$ helyére $\mu/(1 - \mu)$ lép és $m/(m - 1)$ helyére $1/(1 - \mu)$ tehát

$$x = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{1-\mu}} = \mu^{\frac{\mu}{\mu-1}}, \quad y = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{1-\mu}} = \mu^{\frac{1}{\mu-1}},$$

ami észrevételünk általános érvényességét mutatja. Így vezethetnek a (sokak által elhanyagolt, sőt „megvetett”) számpéldák általános érvényességű tételek megsejtésére, ha merünk nem-egész számokkal is próbát tenni. Természetesen a másik irányban torzítanánk, ha csak egyes számpéldák alapján mondanánk ki általános megállapításokat.