

Az ismeretlenek egyike sem 0 (különben legalább az egyik egyenlet bal oldala 0 volna), továbbá egyenlő jelűek, különben $\sqrt{xy}$ -nak nem volna értelme; tegyük fel egyelőre, hogy mindkettő pozitív. Ekkor $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}$ és egyenleteink így alakíthatók:

$$x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}) = 105, \quad y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}) = 70.$$

Az előzők szerint a zárójeles kifejezés pozitív; azt kiküszöbölve (röviden: a két egyenlet osztásával), $x^{\frac{1}{2}} : y^{\frac{1}{2}} = 105 : 70 = 3 : 2$, tehát $y^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}}/3$, $y^{\frac{3}{2}} = 8x^{\frac{3}{2}}/27$, és evvel az első egyenletből $35x^2/27 = 105$, $x^2 = 81$, $x = 9$, végül $y = 4$. Ez az értékpár mindkét egyenletet kielégíti.

Más gyök nem is lehetséges, mert az $x, y < 0$ feltevés akár $x = y$; akár $x < y$, akár $x > y$ -nal lehetetlenségre vezet. Valóban, ha x és y negatívak és $x = y$, akkor $\sqrt{xy} = \sqrt{x^2} = |x| = -x = -y$, és mindkét egyenlet bal oldala 0. Ha $x < y < 0$, akkor a $\sqrt{xy}$ pozitív szám nagyobb $a - y$ pozitív számnál: $\sqrt{xy} > -y$, innen a negatív x -szel szorozva $x\sqrt{xy} < -xy$, tehát a második egyenlet bal oldala negatív: $y^2 + x\sqrt{xy} < y^2 - xy = y(y - x) < 0$, mert az utolsó alakban $y < 0$ és $y - x > 0$. Végül $y < x < 0$ mellett hasonlóan az első egyenlet bal oldala negatív, ugyanis $y < x$, $xy > x^2$, $\sqrt{xy} > -x$, $y\sqrt{xy} < -xy$ és $x^2 + y\sqrt{xy} < x^2 - xy = x(x - y) < 0$, mert $x < 0$ és $x - y < 0$.

Hanyi Zsolt (Szombathely, Nagy Lajos g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ezúttal is több olyan versenyző volt, aki önkényesen feltette, hogy az egyenletrendszer gyökei egész számok, és ennek alapján próbálgatásszerűen *megkereste* azokat. Ilyen dolgozat nem fogadható el, mert ez az eljárás nem biztosít arról, hogy nincs más, nem egész megoldás.

2. Sokan $x^2 = 81$ alapján $x = \pm 9$ -et, $y = \pm 4$ -et adták meg megoldásnak, és a négyzetgyökös egyenletnél elengedhetetlen próbát mellőzve nem zárták ki az $x = -9$, $y = -4$ értékpárt, ezért hiányos a dolgozatuk. A fenti megoldásban az $x > 0$ feltevés alapján jutottunk $x^2 = 81$ -re, ezért $x \neq -9$.