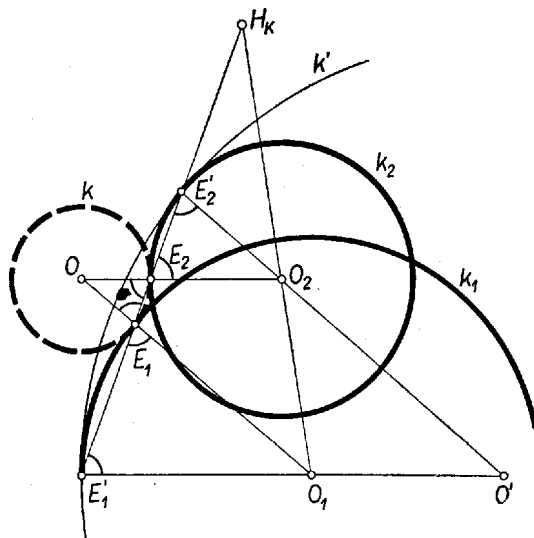


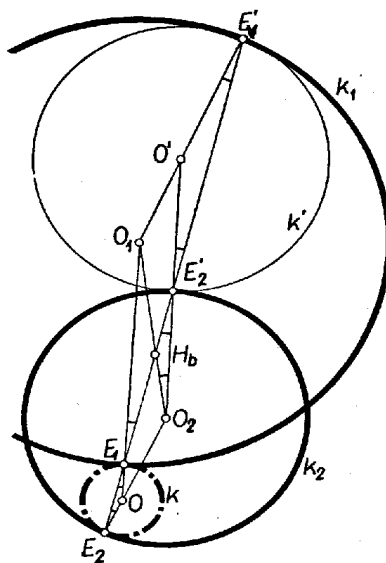
I. megoldás: Tekintsük elsőnek a külső érintkezések esetét. Legyen a k_1, k_2, k körök középpontja rendre O_1, O_2, O , az első kettő sugara r_1, r_2 , és válasszuk az indexezést úgy, hogy $r_1 > r_2$; legyen az E_1E_2 egyenesnek k_1, k_2 -vel való második metszéspontja E'_1, E'_2 , és O_1O_2 -vel való metszéspontja H_k . Erről a H_k -ról mutatjuk meg, hogy E_1E_2 -nek minden más helyzetén is rajta fekszik.



1. ábra

Az érintések folytán az O_1, E_1, O és O_2, E_2, O ponthármak egy egyenesbe esnek (1. ábra), E_1, E_2 elválasztják a középpontokat, ezért O_1, O_2 az E_1E_2 -nek ugyanazon partján fekszik, tehát H_k az O_1O_2 szakaszon kívül van. Az $O_1E_1E'_1, OE_1E_2$ és $O_2E'_2E_2$ egyenlő szárú háromszögekből $O_1E'_1E_1 \sphericalangle = O_1E_1E'_1 \sphericalangle = OE_1E_2 \sphericalangle = OE_2E_1 \sphericalangle = O_2E_2E'_2 \sphericalangle$, és mivel E'_1E_1 és $E_2E'_2$ irányítása egyező, azért $O_1E'_1 \parallel O_2E_2$, és az $O_1E'_1H_k, O_2E_2H_k$ háromszögek hasonlóak. Ebből $H_kO_1 : H_kO_2 = E'_1O_1 : E_2O_2 = r_1 : r_2 > 1$, tehát $H_kO_1 > H_kO_2$, vagyis H_k az $O_1O_2 = d$ szakasznak O_2 -n túli meghosszabbításán fekszik, továbbá $(H_kO_1 - H_kO_2) : H_kO_2 = d : H_kO_2 = (r_1 - r_2) : r_2$ alapján H_k -nak O_2 -től való távolsága $H_kO_2 = dr_2/(r_1 - r_2)$, és ez valóban független k -tól. Másrészt $O_1E'_1$ és O_2E_2 irányítása is egyező, tehát E'_1E_2 a k_1, k_2 körök egy-egy párhuzamos és egyirányú sugarának végpontjait összekötő egyenes, H_k pedig ennek a körök centrálisával való metszéspontja, vagyis a két kör külső hasonlósági pontja.

Ugyanígy bizonyítjuk az állítást, ha a változó kör k_1 és k_2 mindegyikével belső érintkezésben van (1. ábra k' köre, ennek – hogy ábránk ne váljék zsúfolttá, azt választottuk, amelynek érintési pontjai éppen E'_1, E'_2 ; a bizonyítás megfordításából kiderül, hogy ilyen kör van). A meg gondolás bevezető része így módosul: O_1 ugyanazon oldalán van E'_1 -nek, mint O' , ugyanígy áll O_2 is E'_2 -höz képest, ezért O_1, O_2 ismét ugyanazon oldalán van $E'_1E'_2$ nek, ismét az O_1O_2 szakaszon kívül fekvő H_k -ra jutunk. (Az ábrán k_1 és k_2 , valamint az r' sugarú k' belső érintkezése olyan, hogy k' magába foglalja az adott köröket: $r' > r_1 > r_2$; meg gondolásunk azonban $r_2 < r' < r_1$ és $r' < r_2$ esetén is érvényes.)



2. ábra

Hasonlóan bizonyítható a vegyesen külső és belső érintkezések esete is (a 2. ábra ismét két ilyen mutat; ezekben is az E és E' pontok szerepe felcserélődik, a k kör k_1 -et kívülről, k_2 -t belülről érinti és benne van k_2 -ben, k' pedig benne van k_1 -ben és kívülről érinti k_2 -t). A bizonyítás annyiban módosul, hogy H_k megfelelője: H_b az O_1O_2 szakaszon van, ugyanis O az E_1 -nek ellentétes oldalán van mint O_1 , és E_2 -nek ugyanazon oldalán, mint O_2 , ezért O_1 és O_2 az E_1E_2 -nek ellentétes oldalán fekszenek, másrészt hogy a hasonló háromszögek H_b -nél fekvő szögei csúcsszögek; végül $H_bO_2 = dr_2/(r_1 + r_2)$, ami ismét állandó. H_b a két kör belső hasonlósági pontja.

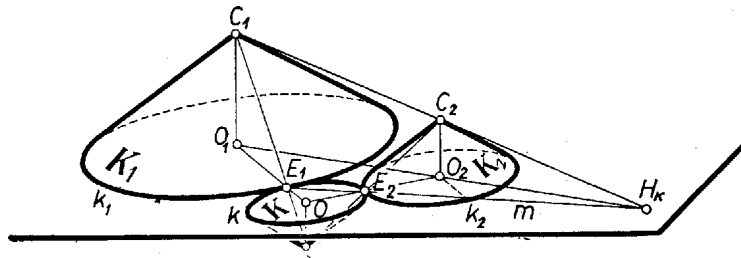
Ha az E'_1 , E'_2 „második” metszéspontok egybeesnek E_1 , ill. E_2 -vel, akkor a szereplő egyenlő szárú háromszögek elfajulnak, mert az alapjukon fekvő szögek 90° -osak lennének, ilyenkor k is elfajul k_1 és k_2 -nek valamelyik közös érintőjébe. Akkor is szakasszá fajulnak a szereplő egyenlő szárú háromszögek, sőt a két hasonló háromszög is, ha O rajta van az O_1O_2 egyenesen; ilyenkor E_1 , E_2 is az O_1O_2 -n van, tehát $E_1E_2 \equiv O_1O_2$, átmegy H_k -n és H_b -n. Ha O_2 egybeesik O_1 -gyel, akkor $H_k \equiv H_b \equiv O_1$.

Ha már most $r_1 = r_2$, akkor kiindulási ábránk O_1O_2 -re és felező merőlegesére tükrös, a „külső-külső” és „belső-belső” esetekben H_k nem létezik, E_1E_2 párhuzamos O_1O_2 -vel; a többi esetek H_b pontja ilyenkor az O_1O_2 felezőpontjába esik. Ezek az O_2H_k , ill. O_2H_b képletből is kiolvashatók, az előbbi $r_1 - r_2 = 0$ miatt értelmetlenné válik.

Összefoglalva: az E_1E_2 egyenes a k_1 , k_2 körök külső, ill. belső hasonlósági pontján megy át aszerint, hogy k -nak a k_1 és k_2 -vel való érintkezése megegyező, ill. ellentétes értelmű.

Knuth Előd (Budapest, I. István g. II. o. t.)

II. megoldás: Az állítást ábránknak térbeli értelmezést adva bizonyítjuk be. Állítsunk k_1 , k_2 , k -ra egyenlő nyílásszögű (más szóval hasonló) K_1 , K_2 , K forgáskúpokat, legyenek ezek csúcsai C_1 , C_2 , C .



A kúpok csúcsát ábránk S síkjának alkalmas oldalára téve elérhetjük, hogy K egy-egy alkotója egybeesik K_1 , ill. K_2 egy alkotójával, és a kúpok a közös alkotó mentén érintik is egymást. Éspedig ha két körünk között külső érintkezést kívánunk, akkor kúpjaik csúcsát S két ellentétes oldalára tesszük (ilyenkor az alkotószakaszokhoz hozzágondoljuk S -en túl való folytatásukat, az alkotók tehát a csúcsból kiinduló *félegyenesek*), belső érintkezésük esetén pedig S -nek ugyanazon oldalára kerülnek a csúcsok (ilyenkor elég alkotószakaszra gondolni). Elsőnek pl. K és K_1 -et helyezzük el, majd K_2 -t a K -hoz viszonyítva. Így eredeti ábránk körei a kúpoknak S -sel való metszészvonalai, mindegyik középpont a megfelelő C -nek S -en való vetülete, az OO_1 és OO_2 egyenesek a közös alkotók vetületei, E_1 és E_2 pedig a közös alkotóknak S -en való dőféspontjai. Most már láthatjuk, hogy ezen alkotók egybeesését (a csúcsok elhelyezésén felül) egyrészt az biztosítja, hogy minden alkotó ugyanakkora szöggel hajlik S -hez, másrészt az, hogy benne vannak az OO_1 -en, OO_2 -n át S -re merőlegesen álló síkban.

Most már a vizsgálandó E_1E_2 egyenes a közös alkotók T síkjának (másképpen: a C_1 , C_2 , C csúcsokkal meghatározott síknak) S -sel való m metszészvonala. T -ben benne fekszik a C_1C_2 egyenes is, ezért ennek S -sel való H dőféspontja m -en fekszik. Ha k és vele E_1E_2 a követelményeknek megfelelően változik, akkor T a C_1C_2 egyenes körül elfordulva más-más helyzetet vesz fel, de állandóan átmegy H -n, és így ugyanez áll m -re is. – Amíg k_1 és k_2 sugarai különbözők, addig C_1 és C_2 S -től különböző távolságban vannak, ezért H biztosan létezik. Ha a sugarak egyenlők, és K_1 és K_2 S -nek ugyanazon oldalára kerültek (a „belső-belső” és a „külső-külső” eset), és ezért C_1C_2 párhuzamos S -sel, ebben az esetben – és csak ebben – H nem létezik, az E_1E_2 egyenesek párhuzamosak C_1C_2 -vel és így egymással.

Faludi Irén (Budapest, Ságvári E. gyak. lg. II. o. t.)