

I. megoldás: A kívánt egyenlőséget megmutathatjuk az SS_1 szorzat tagról tagra való kiszámításával. A tagok száma $(2n+1)^2$, mindegyikük $\pm q^k$ alakú,¹ ahol $0 \leq k \leq 4n$. Ha $0 \leq k \leq 2n$, akkor $\pm q^k$ -t akkor kapunk, ha S -ből $q^k - t, q^{k-1}$ -et, $\dots$, q -t, 1-et szorozzuk S_1 -ből rendre 1-gyel, $-q$ -val, $\dots$, $\pm q^{k-1}$ -nel, $\pm q^k$ -val, az ilyen tagok száma $k+1$. Az első szorzat előjele plusz, a továbbiaké váltakozva mínusz, ill. plusz; eszerint összegük páros számú tag, vagyis páratlan k esetén 0, páros k esetén q^k . Viszont $2n \leq k \leq 4n$, vagyis $0 < k - 2n \leq 2n$ esetén akkor kapunk $\pm q^k$ -t, ha S -ből a $q^{k-2n}, q^{k-2n+1}, \dots, q^{2n-1}, q^{2n}$ tagot szorozzuk S_1 -ből rendre a $q^{2n}, -q^{2n-1}, \dots, \pm q^{k-2n+1}, \pm q^{k-2n}$ taggal. Az előjelekre és az összegekre ugyanaz áll, amit a 0 és $2n$ közti k kitevők esetére megállapítottunk. Ezek szerint az SS_1 szorzat q -nak minden páros kitevőjű hatványát $+1$ együtthatóval tartalmazza 0-tól $4n$ -ig, páratlan kitevőjű hatványait pedig nem tartalmazza, tehát egyenlő a bizonyítandó egyenlőség bal oldalán álló kifejezéssel.

Kóta Gábor (Tatabánya, Árpád g. II. o. t.)

II. megoldás: Legyen $1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2n} = S'$ és $1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2n-2} = S''$. Ekkor egyrészt $S' = S'' + q^{2n}$, másrészt $S = S' + qS''$, $S_1 = S' - qS''$ és így

$$SS_1 = S'^2 - q^2 S''^2 = (1 - q^2)S''^2 + 2q^{2n}S'' + q^{4n}.$$

Már most, mint beszorzással belátható, $(1 - q^2)S'' = 1 - q^{2n}$, ennél fogva

$$SS_1 = (1 - q^{2n})S'' + 2q^{2n}S'' + q^{4n} = S'' + q^{2n}S'' + q^{4n}.$$

Az utolsó alakban q -nak csupa páros kitevőjű hatványai állnak, S'' -ben $q^0 = 1$ -től q^{2n-2} -ig (n tag) q^{2n} S'' -ben q^{2n} -től q^{4n-2} -ig (n tag) és q^{4n} (összesen $2n+1$ tag) éppen mint a bizonyítandó egyenlőség bal oldalán.

III. megoldás: A bizonyítást a teljes indukció módszerével is végezhetjük. Az állítás $n=0$ és $n=1$ esetén igaz, mert $1 \cdot 1 = 1$ és $(1 + q + q^2)(1 - q + q^2) = 1 + q^2 + q^4$. Feltéve, hogy valamely $n = k$ értékre igaz, megmutatjuk, hogy a következő $n = k+1$ értékre is helyes. Így S, S_1 helyére $S' = S + q^{2k+1} + q^{2k+2}$, $S'_1 = S_1 - q^{2k+1} + q^{2k+2}$ lép, így

$$S'S'_1 = SS_1 + q^{2k+1}(S_1 - S) + q^{2k+2}(S + S_1) - q^{4k+2} + q^{4k+4}.$$

Itt

$$\begin{aligned} q^{2k+1}(S_1 - S) &= -2q^{2k+1}(q + q^3 + \dots + q^{2k-1}) = \\ &= -2q^{2k+2} - 2q^{2k+4} \dots - 2q^{4k}, \\ q^{2k+2}(S + S_1) &= 2q^{2k+2}(1 + q^2 + \dots + q^{2k}) = \\ &= 2q^{2k+2} + 2q^{2k+4} + \dots + 2q^{4k+2}, \end{aligned}$$

tehát SS_1 -nek a feltevés szerinti kifejezését beírva

$$S'S'_1 = SS_1 + 2q^{4k+2} - q^{4k+2} + q^{4k+4} = 1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{4k+2} + q^{4k+4},$$

ez pedig valóban a bizonyítandó egyenlőség bal oldala $n = k+1$ -re.

Gajári Gyula (Budapest, Eötvös J. g. I. o. t.)

Megjegyzés. Számos dolgozat az $(a^k - b^k) : (a - b)$ és az $(a^{2k+1} - b^{2k+1}) : (a + b)$ hányados polinomalakjának felhasználásával bizonyította az állítást. Ezeket is elfogadtuk, bár a használt azonosságok lényegében a mértani sor összegképletét adják: a (szokásosan rendezett) polinomalaknak minden az első utáni tagja az előtte állóból b/a -val, ill. $-b/a$ -val való szorzással áll elő; $a = 1$ -gyel (és $b = q$ -val) pedig az első azonosság az összegképlet szokásos alakjába megy át.

¹ Vagy plusz, vagy mínusz jellel q^k (nem pedig egyszer plusz és egyszer mínusz jellel).