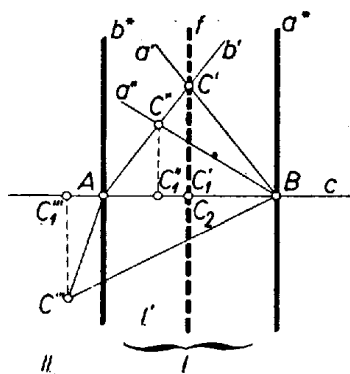


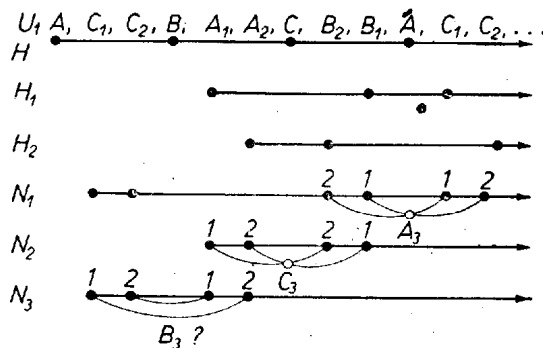
I. Menjünk végig a kérdéseken hegyesszögű háromszög esetén, vagyis legyen egyelőre $\gamma \leq \beta \leq \alpha < 90^\circ$. Így a magasságtalppont minden oldalszakaszon belső pont, az oldalnak arra a felére esik, amelyiknek a végpontjában a háromszögnek nagyobb szöge van, és a felezőponttal akkor és csak akkor esik egybe, ha az oldal végpontjainál egyenlő szögek vannak. Ugyanis pl. az AB oldal végpontjainál levő α és β hegyes szögek nem közös szárai csak abban az I síksávban metszhetik egymást (1. ábra), amelyet az AB -re A és B -ben állított b^* , a^* merőlegesek határolnak, hiszen az ezeken túl fekvő II , ill. III félsíkokban az AC , ill. BC szárnak nincs pontja.



1. ábra

Ennélfogva C_1 valóban AB -re esik. Ha $BC = AC$, azaz $\alpha = \beta$, akkor C (az ábrán C' ilyen) az I sáv tengelyén, AB -nek f felező merőlegesén van, így $C'_1 \equiv C_2$; $BC > AC$ azaz $\alpha > \beta$ esetén pedig C (az ábrán C'' ilyen) az f és b^* közti I' sávban van, így C_1 valóban az AC_2 szakaszra, a nagyobb szög oldalára esik. Mivel nekünk az oldalfelező pontot kell viszonyítanunk a magasságtalpponthoz, azért megállapításunkat így mondhatjuk ki: az oldalfelező pont a magasságtalpponttal kettévágott oldalnak a kisebb szög csúcsa felé eső szakaszán van, vagy egybeesik a talpponttal.

Így az előírt U_I útvonalon visszafordulás nincs. A_2 és A_1C szakaszon van, B_2 a CB_1 -en, C_2 a C_1B -n, a pontok sorrendjét általában a 2. ábra mutatja.

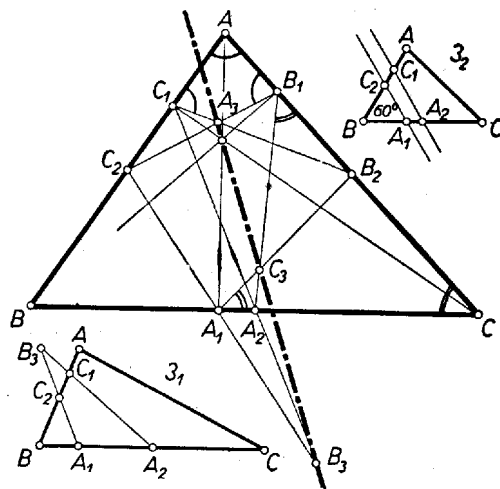


2. ábra

Egybeesések: $\alpha = \beta$ esetén $C_2 \equiv C_1$, $\beta = \gamma$ esetén $A_2 \equiv A_1$, $\alpha = \beta = \gamma$ esetén e kettőn felül még $B_2 \equiv B_1$, (vagyis $B_2 \equiv B_1$ csak egyenlő oldalú háromszögben áll fenn).

Esetünkben U_I azonos az $ABC = H$ háromszög kerületének bejárásával. Az $A_1B_1C_1 = H_1$ és $A_2B_2C_2 = H_2$ háromszögek körüljárása viszont U_I olyan rövidítése, amelyben H csúcsait H_1 , ill. H_2 oldalaival „átvágjuk”, az oldalakból csak egy (belső) pontot hagyva meg, ezért H , H_1 és H_2 körüljárási iránya megegyező.

Ha H_1 és H_2 -nek egy csúcsa sem közös, tehát $\gamma < \beta < \alpha < 90^\circ$ (amiből $\alpha > 60^\circ$, $\gamma < 60^\circ$), akkor a vizsgálandó egyenespárok tagjai különbözők. A B_1C_2 és C_1B_2 egyenesek biztosan metszik egymást egy a H -n belül fekvő A_3 pontban (3. ábra), mert ezek az $N_1 = C_1C_2B_2B_1$ négyszög átlói, és e négyszög konvex, mert a kerülete ugyancsak átvágásos rövidítése U_I -nek (lásd a 2. ábra vázlatát), márpedig konvex négyszög átlói a négyszög belsejében metszik egymást.



3. ábra

Ugyanígy adódik az $N_2 = A_1A_2B_2B_1$ konvex négyszögből, hogy A_1B_2 és B_1A_2 -nek C_3 metszéspontja is létezik, és pedig H -n belül. A C_1A_2 és A_1C_2 pár tagjai viszont az $N_3 = C_1C_2A_1A_2$ konvex négyszögben szemben fekvő oldalegyenesek, így csak H -n kívül lehet közös pontjuk; ezt – ha létezik, – B_3 -mal jelöljük.

A B_1C_2 , C_1B_2 egyenespár $B_1A_3C_1$ szögét az $N_4 = AC_1A_3B_1$ négyszögből számíthatjuk. Mindegyik magasságtalppont a megfelelő oldal fölé írt Thalész-körön van, ezért pl. $A_1C_2 = B_1C_2 = AB/2$. Így az AB_1C_2 , AC_1B_2 háromszögek egyenlő szárúak, A -nál fekvő szögük közös: α , ezért B_1 -nél, C_1 -nél fekvő szögük is α . Ennélfogva N_4 -ből az a $B_1A_3C_1$ szög, amelynek terében A fekszik, $360^\circ - 3\alpha$ -val egyenlő (ez 90° és 180° közé eső szög). Másképpen: A_3 -ból a B_1B_2 és C_1C_2 szakaszok látószöge $180^\circ - (360^\circ - 3\alpha) = 3\alpha - 180^\circ$ (0° és 90° közé eső szög).

Kézenfekvő volna innen minden A , B , C , valamint az α betű helyére rendre C , A , B , γ -t írva, az indexeket pedig meghagyva ezt kimondani: „ C_3 -ból A_1A_2 és B_1B_2 látószöge $3\gamma - 180^\circ$ ”. Ez azonban $\gamma < 60^\circ$ folytán negatív szög. Hasonlóan „szokatlan” eredményt ad a megelőző megállapítás „átírása”: „az az $A_1C_3B_1$ szög, amelynek terében C fekszik, $360^\circ - 3\gamma$ -val egyenlő”, – ez ugyanis nagyobb 180° -nál. Bár az utóbbit 360° -ra kiegészítő, az A -t és B -t tartalmazó $A_1C_3B_1$ szög már jól szemléltethető, nagysága kivonással 3γ -nak adódik, és $0^\circ < 3\gamma < 180^\circ$, mégis joggal kételkedhetünk e „homályos” úton kapott eredményben. – Ezt azonban úgy is megkaphatjuk, ha C és C_3 -hoz A_2 és B_2 -t vesszük hozzá, amelyek U_I szerint közelebb vannak C -hez, mint A_1 és B_1 és amelyekkel az $N_5 = CB_2C_3A_2$ négyszög konvex. A CA_1B_2 és CB_1A_2 egyenlő szárú háromszögekben C , A_1 és B_1 -nél γ , ezért B_2 , A_2 -nél $180^\circ - 2\gamma$ szög fekszik, tehát N_5 -ből $B_2C_3A_2 \angle = 360^\circ - \gamma - 2(180^\circ - 2\gamma) = 3\gamma$. Eszerint az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszok C_3 -ból vett látószöge $180^\circ - 3\gamma$.¹

Tisztázzuk a C_1A_2 , A_1C_2 egyenespár metszéspontjának helyzetét! $BA_1C_2 \angle = BC_1A_2 \angle = \beta$ és $BA_2C_1 \angle = BC_2A_1 \angle = 180^\circ - 2\beta$, eszerint $\beta < 60^\circ$ esetén az egyeneseknek A_1 , A_2 -n túli félegyenesei metszik egymást (3. ábra főrésze), $\beta > 60^\circ$ esetén a C_1 , C_2 -n túliak (3₁ mellékábra), $\beta = 60^\circ$ esetén pedig a két egyenes párhuzamos (3₂ mellékábra). Ugyanis $\beta < 60^\circ$ mellett a két egyenes BC -vel, ennek H -t tartalmazó partján olyan szögeket alkot, melyeknek összege nagyobb 180° -nál: $C_2A_1A_2 \angle + C_1A_2A_1 \angle = (180^\circ - \beta) + (180^\circ - 2\beta) = 360^\circ - 3\beta > 180^\circ$, ezért a két egyenes BC -nek valóban nem a H -t tartalmazó partján metszi egymást; $\beta > 60^\circ$ esetén pedig hasonlóan $A_2C_1C_2 \angle + A_1C_2C_1 \angle = \beta + 2\beta = 3\beta > 180^\circ$. – Ezek szerint $\beta < 60^\circ$ esetén az $A_1A_2B_3$ háromszög A_1 és A_2 -nél fekvő szögeinek összege $\beta + 2\beta = 3\beta$, ezért B_3 -ból A_1A_2 és C_1C_2 látószöge $180^\circ - 3\beta$, ill. $\beta > 60^\circ$ esetén hasonlóan $3\beta - 180^\circ$.

A szögekre tett megállapításaink $\alpha = \beta \neq \gamma$ és $\alpha \neq \beta = \gamma$ esetén is érvényesek, ilyenkor két egyenespárunk meghatározó pontjaiból egy-egy egybeesik, és β nem 60° -os. Egyenlő oldalú háromszögben mindhárom egyenespárunk páronként egybeesik, a szögekre vonatkozó kérdés tárgytalan.

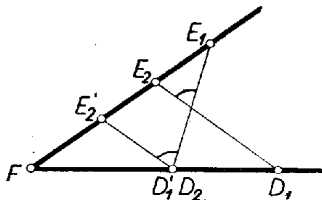
II. Derékszögű háromszög esetén $\gamma \leq \beta < \alpha = 90^\circ$, B_1 és C_1 az A csúcsba esnek, de visszafordulás a módosult U_{II} -ben sincs. H_1 egyenesszakasszá fajul, körüljárásáról nem beszélhetünk. A_3 is A -ba esik, így a fentebb használt N_4 ponttá zsugorodik, a $B_1C_2 \equiv AC_2 \equiv AB$ és $C_1B_2 \equiv AB_2 \equiv AC$ egyeneseknek, vagyis a befogóknak 90° -os szögét a fenti $360^\circ - 3\alpha$ és $3\alpha - 180^\circ$ képletek mégis helyesen adják meg. Többi megállapításaink változatlanul átvehetők, mert a hozzájuk vezető megfontolások érvényesek maradnak.

III. Tompaszögű háromszög esetén ($\gamma \leq \beta < 90^\circ < \alpha$) a két hegyes szög csúcsából húzott magasság, B_1 , C_1 talppontja az AC , AB oldalnak A -n túli meghosszabbítására esik, (lásd az 1. ábrán C''' -t) így az előírt U_{III} útvonalon két visszafordulás van, a bejárást újra és újra ismételve A -n 3-szor annyiszor haladunk át, mint B -n és C -n. B_2 , C_2 így is CB_1 -en, C_1B -n van. A pontok sorrendje, a többszörös átmeneteket is jelölve: A , C_1 , A , C_2 , B , A_1 , A_2 , C , B_2 , A , B_1 , A , C_1 , ... H_2 körüljárása most is átvágásos rövidítése H -énak, így körüljárásuk egyező. H_1 körüljárása a kieső pontok miatt nem vezethető le H -éből. H_1 körüljárása ellentétes H -éval, mert a két kieső talpponttal képezett

¹ A fenti két megfontolás eltérése a körüljárásból következik; figyeljük meg a 2. ábrán A és C körül az indexek elhelyezkedését!

AC_1B_1 háromszög körüljárása egyezik $\mathbf{H}$ -ével, így ennek AB_1C_1 körüljárása ellentétes azokkal, $\mathbf{H}_1$ körüljárása pedig az utóbbival egyező, mert A_1 ugyanazon partján van B_1C_1 -nek, mint A .

A szögekre vonatkozó vizsgálatot megkönnyíthetjük. Fel kell ugyanis figyelni arra, hogy eddigi szög-eredményeink rendre csak α , β , γ -tól függenek, másrészt hogy a $\beta \geq 60^\circ$ melletti eredmény – bár más-más megfontolással nyertük, azonos a γ -ra, ill. $60^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ -ra adódott eredménnyel. Vegyük észre, hogy tulajdonképpen a következő kérdést vizsgáltuk több változatban: D_2 , E_2 az egymást F -ben metsző d , e egyenesek egy-egy tetszős szerinti, de F -től különböző pontja, egy-egy D_1 , ill. E_1 pontjukat pedig az E_2 , ill. D_2 középpontú, F -en átmenő körrel metsszük ki, vagyis $D_1E_2 = FE_2$, $E_1D_2 = FD_2$; mekkorák a D_1E_2 és E_1D_2 egyenesek szögei, ha $D_2FE_2 \angle = \varphi$. Feladatunk céljára φ a 0° és 180° közti szög, és a $D_2F : E_2F$ arány más-más értéke szerint kapjuk mindazon háromszög alakokat, melyek egyik szöge φ ; a $\varphi \leq 90^\circ$ eseteket azonban már megvizsgáltuk.



Egyszerűbb ez a kérdés, ha D_1E_2 helyett a vele D_2 -n át húzott g párhuzamost tekintjük, ugyanis E_2 -t g és e -nek E'_2 metszéspontjával helyettesítve a kérdéses szögek változatlanok, pontjaink száma viszont csökken, mert az FD_1E_2 és $FD_2E'_2$ háromszögek hasonlóak, és ezért az E'_2 -ből adódó D'_1 azonos D_2 -vel. Ez is mutatja, hogy a keresett szög valóban csak φ -tól függhet, de a $D_2F : E_2F$ aránytól nem; tehát a tompaszögű háromszög hegyes szögeinek megfelelő C_1A_2 , A_1C_2 és A_1B_2 , B_1A_2 egyenespárok szögeit nem kell újra megállapítanunk. E'_2 -t FD_2 felező merőlegese metszi ki e -ből (hacsak nem $\varphi = 90^\circ$, mert ekkor E'_2 nem létezik), tehát $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ esetén E'_2 a φ szög FE_2 szárának F -en túl való meghosszabbításán van. Ez pedig azt jelenti, hogy a φ és $180^\circ - \varphi$ nagyságú szögekhez ugyanaz az egyszerűsített ábra tartozik, tehát a keresett szög értéke ugyanaz.

Eszerint $90^\circ < \alpha < 120^\circ$ esetén a B_1C_2 , C_1B_2 egyenespár szöge akkora, mint a $90^\circ > \alpha' = 180^\circ - \alpha < 60^\circ$ -nak megfelelő α' esetén: $3\alpha' - 180^\circ = 3(180^\circ - \alpha) - 180^\circ = 360^\circ - 3\alpha$; $\alpha = 120^\circ$ esetén a B_1C_2 és C_1B_2 egyenesek párhuzamosak; végül $120^\circ < \alpha < 180^\circ$ esetén akkora a szög, mint $60^\circ > \beta' = 180^\circ - \alpha > 0^\circ$ esetén, vagyis $180^\circ - 3\beta' = 180^\circ - 3(180^\circ - \alpha) = 3\alpha - 360^\circ$.

Ezzel vizsgálatunkat befejeztük.

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az egyszerűsített ábrából a $\varphi < 90^\circ$ esetekre is könnyebben kapjuk a keresett szöget. Pl. $0^\circ < \varphi < 60^\circ$ esetén $FD_2E_1 \angle = 180^\circ - 2\varphi > 60^\circ > \varphi$, ezért $FE_1 > FE'_2$, így az FD_2E_1 és $FD_2E'_2$ egyenlő szárú háromszögekből $\tau = E_1D_2E'_2 \angle = E_1D_2F \angle - E'_2D_2F \angle = (180^\circ - 2\varphi) - \varphi = 180^\circ - 3\varphi$. Célszerű lett volna tehát a módosított problémát segédtegelként előre bizonyítani. Így azonban nem látnók, miért éppen erre a segédtegelre van szükség; ezért a fenti nehézkes út mégis tanulságos.

2. A fentiekkel közel járunk egy névtelen levélíró azon javaslatának teljesítéséhez, hogy időnként tegyük közzé egy-egy megoldó közlését arról, hogy „hogyan jött rá a megoldásra”.

3. Hogy tompaszögű háromszögben $\mathbf{H}_1$ ellentétes körüljárású $\mathbf{H}$ -val, azt így is beláthatjuk: Legyen az AB_1BA_1 és AC_1CA_1 négyszögek átlóinak metszéspontja B^* , C^* . A négyszögek a látottak szerint konvexek, ezért B^* , C^* mindkét átlószakaszon rajta van. Így $\mathbf{H}_1$ körüljárása azonos $A_1B^*C^*$ -ével, ez viszont átvágásos rövidítése az A , C^* , C , A_1 , B , B^* , A útvonalnak, az ACB bejárásnak.

4. Olvassuk el a 948. feladathoz fűzött megjegyzés második bekezdését is.